Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Sarah Drewes
Dipl.-Math. Carsten Ziems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SoSe 2009
24.06.2009

10. Übungsblatt zur „Mathematik IV für Elektrotechnik/ Mathematik III für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G32 (Zweidimensionale Messreihen)

In einem Krankenhaus wurden von 20 neugeborenen Kindern die Körperlänge x (in cm) und der Kopfumfang y (in cm)gemessen. Dabei ergab sich die folgende nach der Körperlänge geordnete Messreihe

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	48.2	48.5	48.6	48.9	49.2	49.4	49.5	49.8	50.3	50.3
y_i	34.8	33.4	35.1	34.0	34.9	36.0	34.1	35.5	35.3	36.1

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	50.7	50.9	51.0	51.1	51.3	51.4	51.6	52.1	52.4	52.8
y_i	36.8	35.4	35.9	35.7	35.2	36.2	36.9	37.4	36.3	37.8

mit den Summenwerten

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 1008, \quad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 50837.86, \quad \sum_{i=1}^{20} y_i = 712.8, \quad \sum_{i=1}^{20} y_i^2 = 25428.05, \quad \sum_{i=1}^{20} x_i y_i = 35948.24.$$

(a) Stelle die beobachteten Daten in einem Punktediagramm graphisch dar.

(b) Berechne die empirische Kovarianz und den empirischen Korrelationskoeffizienten zu dieser zweidimensionalen Messreihe. Rechtfertigt der berechnete Wert des empirischen Korrelationskoeffizienten die Annahme eines annähernd linearen Zusammenhangs zwischen x und y?

(c) Berechne die Regressionsgerade
$$y = \hat{a}x + \hat{b}$$
zu der gegebenen Messreihe und zeichne diese in das Punktediagramm ein.

(d) Bestimme mittels der Regressionsgeraden einen Schätzwert für den Kopfumfang bei einer Körperlänge von 50 cm.

Aufgabe G33 (Unabhängigkeit)

Ein weißer und ein schwarzer Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

A: Der schwarze Würfel zeigt eine Vier.

B: Beide Würfel zeigen die gleiche Augenzahl.

C: Die Augensumme der beiden Würfel ist durch drei teilbar.

Prüfe die Ereignisse auf paarweise und vollständige Unabhängigkeit.

Aufgabe G34 (Regel von der vollständigen Wahrscheinlichkeit, Formel von Bayes)

Wird ein Patient untersucht, ob er eine bestimmte Krankheit hat oder nicht, so gibt es zwei Möglichkeiten, eine falsche Diagnose zu stellen: Man spricht von einem Fehler 1. Art, wenn der Patient erkrankt ist, dies jedoch nicht erkannt wird (falsch-negativ-Befund) bzw. von einem Fehler der 2. Art, wenn der Patient für krank erklärt wird, obwohl er gesund ist (falsch-positiv-Befund). Für den ELISA-Test zur Erkennung von Antikörpern gegen die Immunschwäche HIV wird geschätzt, daß Fehler 1. und 2. Art mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von 0.02 auftreten. Man gehe davon aus, daß eine zu untersuchende Person mit Wahrscheinlichkeit 0.001 erkrankt ist.

a) Zeichne ein Baumdiagramm für diese Situation.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine zufällig ausgewählte Person für krank erklärt?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Person tatsächlich erkrankt ist, wenn sie für krank erklärt wurde?

Aufgabe G35 (Empirischer Korrelationskoeffizient)

Die Zahlenwerte einer Messreihe hängen oft von der verwendeten Maßeinheit (z. B. cm oder m bei Längen) ab. Zeige, dass der Wert des empirischen Korrelationskoeffizienten nicht davon abhängt. Das heißt: Für zwei Messreihen $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ und $(x_1, z_1), \ldots, (x_n, z_n)$ mit $z_i = \lambda y_i$, $i = 1, \ldots, n$, wobei $\lambda > 0$ eine Konstante ist, gilt:

$$r_{xy} = r_{xz}.$$

Aufgabe G36 (Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeit)

Sepp, Hinz und Kunz sitzen vor dem Fernseher. Für den Fall, dass das Bier nicht reichen sollte, haben sie das folgende Verfahren verabredet um denjenigen zu ermitteln, der Nachschub besorgen muss:

Zunächst werfen Hinz und Kunz eine Münze. Zeigt diese Zahl, scheidet Hinz aus bei Kopf Kunz. Dann werfen Sepp und der Nichtausgeschiedene eine Münze. Ist das Ergebnis Zahl, dann muss Sepp das Bier holen ansonsten der Nichtausgeschiedene.

(a) Wähle eine Bezeichung für die Ergebnisse des im Verfahren durchgeführten Zufallsexperiments und gib die Ergebnismenge an.

(b) Gib dann die Ereignisse

A_1 : Sepp muss Bier holen.
A_2 : Hinz muss Bier holen.
A_3 : Kunz muss Bier holen.

mit Hilfe der in (a) gewählten Bezeichnung an. Welche dieser Ereignisse sind Elementarereignisse?

(c) Berechne die Wahrscheinlichkeiten $P(A_1)$, $P(A_2)$ und $P(A_3)$. Ist das Verfahren gerecht?

Hausübung

Aufgabe H33 (Zweidimensionale Messreihen)

Eine Strecke wurde an 15 verschiedenen Tagen und zu unterschiedlichen Tageszeiten mit dem gleichen Fahrzeug abgefahren. Dabei wurde jeweils die Durchschnittsgeschwindigkeit v_i (in km/h) und die Verkehrsdichte d_i (in Anzahl Fahrzeuge pro km) ermittelt. Dies ergab die folgenden Daten:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_i	29	40	42	47	50	56	57	60	60	62	63	67	69	74	82
d_i	40	37	34	30	25	19	23	21	13	16	21	13	16	11	7

(a) Stelle die beobachteten Daten zunächst in einem Punktediagramm graphisch dar und berechne dann den empirischen Korrelationskoeffizienten.

(b) Die Ergebnisse von Teil (a) legen nahe, dass der Zusammenhang zwischen Durchschnittsgeschwindigkeit v und Verkehrsdichte d durch eine Gerade beschrieben werden kann. Bestimme die Regressionsgerade

$$d = \hat{a}v + \hat{b}$$

zur Messreihe (v_i, d_i), $i = 1, \ldots, 15$ und zeichne diese in das Punktediagramm ein.

(c) Da die Durchschnittsgeschwindigkeit leichter zu ermitteln ist als die Verkehrsdichte, sollen mit Hilfe der in Teil (b) berechneten Regressionsgerade Schätzwerte für die Verkehrsdichte bestimmt werden. Gib den Schätzwert für die Verkehrsdichte bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 55 km/h an.

Aufgabe H34 (Regel von der vollständigen Wahrscheinlichkeit, Formel von Bayes)

Die Belegschaft einer Firma setzt sich wie folgt zusammen: 50% Arbeiter, 40% Angestellte und 10% leitende Angestellte. Man geht davon aus, dass während eines Jahres ein Arbeiter (Angestellter bzw. leitender Angestellter) mit Wahrscheinlichkeit p ($p/2$ bzw. $p/4$) die Firma verlässt. Mit Wahrscheinlichkeit 14.5% scheidet ein bestimmtes Belegschaftsmitglied während eines Jahres aus der Firma aus.

a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm für die beschriebene Situation.

b) Bestimmen Sie p.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person, welche die Firma verlässt, ein Arbeiter (Angestellter bzw. leitender Angestellter)? Verwenden Sie jeweils Ihr Ergebnis aus b).

Aufgabe H35 (Standardabweichung)

a) Gegeben sei eine Messreihe $x_1, \ldots, x_n$ mit dem arithmetischen Mittel $\overline{x}$ und der empirischen Varianz s_x^2. Außerdem seien zwei reelle Konstanten $a \neq 0$ und b fest vorgegeben. Zeigen Sie: Bei linearer Transformation der Messreihe gemäß $y_i = a \cdot x_i + b,\ i = 1, \ldots, n$, gilt für das arithmetische Mittel $\overline{y}$ der transformierten Werte $\overline{y} = a \cdot \overline{x} + b$, sowie für die empirische Varianz $s_y^2 = a^2 s_x^2$.

b) In Brighton an der Südküste Englands wurden während der Weihnachtsferien die folgenden Tagestiefsttemperaturen $x_i,\ i = 1, \ldots, 10$, in Grad Fahrenheit gemessen:

$$31 \quad 27 \quad 28 \quad 26 \quad 30 \quad 36 \quad 35 \quad 34 \quad 31 \quad 30$$

Berechnen Sie anhand der Informationen $\sum_{i=1}^{10} x_i = 308$ und $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 9588$ die mittlere Tagestiefsttemperatur und die empirische Streuung sowohl in Grad Fahrenheit als auch in Grad Celsius.
(Hinweis: x Grad Fahrenheit entsprechen $y = \frac{5}{9}(x - 32)$ Grad Celsius.)

Aufgabe H36 (Kombinatorik)

Ein Skatspiel besteht aus 32 Karten, vier davon heißen Buben. Nach dem Mischen der Karten erhalten die drei Spieler (Alex, Bodo und Carl) jeweils zehn Karten. Die verbleibenden zwei Karten bilden den sogenannten Skat. Berechne jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Mindestens ein Bube befindet sich im Skat.

B: Carl hat genau einen Buben.

C: Ein Spieler hat genau drei Buben.

D: Jeder Spieler besitzt mindestens einen Buben.

Aufgabe H37 (Zufallsexperiment und Wahrscheinlichkeit)

Eine Firma möchte ihren Kunden den Zugriff auf ihre persönlichen Daten über das Internet ermöglichen. Für den Zugang müssen die Kundennummer und eine PIN eingegeben werden. Nachdem die PIN dreimal hintereinander falsch eingegeben wurde, wird der Zugang gesperrt und der Kunde informiert.

(a) Angenommen einem Hacker sei die Kundennummer bekannt und er probiert nun zufällig gewählte PINs aus. (Jede PIN wird mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewählt.) Wieviele Stellen muss die PIN mindestens haben, damit die Wahrscheinlichkeit, dass der Hackerangriff unbemerkt bleibt, höchstens 10^{-6} ist.

(b) Wieviele Stellen wären nötig, wenn anstelle der PIN ein Passwort verwendet würde. Dabei soll das Passwort aus Buchstaben (ohne Umlaute) und Ziffern bestehen, wobei Groß- und Kleinschreibung nicht beachtet wird.