Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Sarah Drewes
Dipl.-Math. Carsten Ziems

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SoSe 2009
10.06.2009

8. Übungsblatt zur „Mathematik IV für Elektrotechnik/ Mathematik III für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G26 (Randwertaufgabe: Differenzenverfahren)

Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned} y''(t) &= y(t) - t(t^2-6), \quad t \in [0,1] \\ y(0) &= 0, \quad y(1) = 1. \end{aligned}$$

(a) Bestimme eine Näherungslösung des obigen Randwertproblems mit dem Differenzenverfahren. Verwende dabei die Schrittweite $h = \frac{1}{3}$.

(b) Bestimme die Werte der exakten Lösung ($y(t) = t^3$) an den Stützstellen und vergleiche diese mit den Näherungswerten. Diskutiere das Ergebnis.

Aufgabe G27 (Randwertaufgabe: Variationsverfahren mit Finiten Elementen)

Betrachte die Randwertaufgabe

$$-y''(t) + y(t) = t, \quad y(0) = y(1) = 0$$

mit der exakten Lösung $y(t) = -\frac{\sinh t}{\sinh 1} + t$. Berechne eine Näherungslösung $u_h(t) = u_1\phi_1(t) + u_2\phi_2(t)$ dieses Problems mit dem Ritzverfahren und den Ansatzfunktionen

$$\phi_i(t) = t^i(1-t), \quad i = 1, 2.$$

Stelle dazu zunächst das Gleichungssystem $A\bar{u} = c$, mit $a_{ij} = \alpha(\phi_i, \phi_j)$ und $c_i = (g, \phi_i)$ aus der Vorlesung auf, um daraus die Koeffizienten u_1 und u_2 zu berechnen. Vergleiche die Näherung mit der exakten Lösung.

Aufgabe G28 (Differenzenverfahren für die Poissongleichung)

Wir betrachten die Poissongleichung mit Dirichlet–Randbedingung auf dem Einheitsquadrat $G = (0,1) \times (0,1)$

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x) \quad &&\text{für } x \in G, \\ u(x) &= 0 \quad &&\text{für } x \in \partial G, \end{aligned} \tag{1}$$

mit $f : G \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \frac{486}{10}(x_1 - x_2)^2$. Bestimme eine Näherungslösung des obigen elliptischen Randwertproblems mit dem Differenzenverfahren mit Schrittweite $h = \frac{1}{3}$.

(a) Zeichne dazu zunächst das entstehende Gitter und beschrifte die Gitterpunkte nach der Notation aus dem Skript.

(b) Stelle dann das lineare Gleichungssystem für das Differenzenverfahren auf.

(c) Bestimme U_{11} derart, dass der Vektor $u^h = (U_{11}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10}, \frac{1}{10})^T$ hier Lösung des Differenzenverfahrens ist. Welche Annäherung erhalten wir für u in $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$?

(d) Was können wir über den Fehler zwischen der exakten Lösung u zu obigem Problem im Punkt x_{ij} und der Näherung U_{ij} aussagen, wenn wir die Schrittweite h gegen Null gehen lassen?

Hausübung

Aufgabe H27 (Randwertaufgabe: Variationsverfahren mit Finiten Elementen)

Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$-y''(t) + y(t) = -t, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Zur näherungsweisen Lösung soll das Ritzverfahren verwendet werden. Als Basisfunktionen sollen die stückweise linearen Funktionen

$$\Phi_i(t) = \begin{cases} \frac{t-t_{i-1}}{h} & \text{für } t : t_{i-1} \le t \le t_i \\ \frac{t_{i+1}-t}{h} & \text{für } t : t_i \le t \le t_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

verwendet werden. Das Intervall $[0, 1]$ wird durch Gitterpunkte $t_j = h \cdot j$, mit $h = \frac{1}{N+1}$ in Teilintervalle $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ zerlegt, wobei $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{N+1} = 1$. Berechne die Steifigkeitsmatrix und stelle das zugehörige lineare Gleichungssystem auf.

Aufgabe H28 (Differenzenverfahren für die Poissongleichung)

Wir betrachten die Poissongleichung (1) mit Dirichlet–Randbedingung auf dem Einheitsquadrat $G = (0, 1) \times (0, 1)$ aus Aufgabe G28 mit $f : G \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = -512(x_1 - \frac{1}{2})^2 - 512(x_2 - \frac{1}{2})^2 + 64$. Bestimme eine Näherungslösung dieses elliptischen Randwertproblems mit dem Differenzenverfahren mit Schrittweite $h = \frac{1}{4}$.

(a) Zeichne dazu zunächst das entstehende Gitter und beschrifte die Gitterpunkte nach der Notation aus dem Skript.

(b) Stelle dann das lineare Gleichungssystem für das Differenzenverfahren auf.

(c) Bestimme eine Lösung des Differenzenverfahrens. Welche Annäherung erhalten wir für u in $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$?
Hinweis: Zur Bestimmung einer Lösung darf mathematische Software benutzt werden.

Aufgabe H29 (Finite Elemente Methode für die Poissongleichung)

Wir betrachten die Poissongleichung (1) mit Dirichlet–Randbedingung auf dem Einheitsquadrat $G = (0, 1) \times (0, 1)$ aus Aufgabe G28 mit $f : G \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$. Berechne eine Näherungslösung $u_h(x_1, x_2)$ mit dem Finite Elemente Ansatz aus der Vorlesung und den Ansatzfunktionen

$$\begin{aligned} \phi_1(x_1, x_2) &= x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2), & \phi_2(x_1, x_2) &= x_1(1 - x_1)x_2^2(1 - x_2), \\ \phi_3(x_1, x_2) &= x_1^2(1 - x_1)x_2(1 - x_2), & \phi_4(x_1, x_2) &= x_1^2(1 - x_1)x_2^2(1 - x_2). \end{aligned}$$

(a) Begründe, dass die ϕ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, einen möglichen Finite Elemente Raum für die Poissongleichung (1) mit Dirichlet–Randbedingung auf dem Einheitsquadrat $G = (0, 1) \times (0, 1)$ aufspannen.

(b) Zeige, dass für das beim Finite Elemente Ansatz entstehende lineare Gleichungssystem $a_{12} = \frac{1}{90}$ sowie $c_1 = \frac{1}{144}$ gilt, indem Du a_{12} und c_1 berechnest.

(c) Es gilt $a_{11} = \frac{2}{90}$, $a_{13} = \frac{1}{90}$, $a_{14} = \frac{1}{180}$, $a_{22} = \frac{4}{525}$, $a_{23} = \frac{1}{180}$, $a_{24} = \frac{11}{2520}$, $a_{33} = \frac{4}{525}$, $a_{34} = \frac{2}{525}$, und $a_{44} = \frac{4}{1575}$, sowie $c_2 = \frac{1}{240}$, $c_3 = \frac{1}{240}$ und $c_4 = \frac{1}{400}$. Stelle die Steifigkeitsmatrix A auf und bestimme u_1, so dass $\bar{u} = (u_1, 0.1823, 0.2363, 0.2005)^T$ das lineare Gleichungssystem $A\bar{u} = c$ (bis auf Rundungsfehler) löst.

(d) Gib die Funktion $u_h(x)$ an und berechne $u_h(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.