Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl. Math. Sarah Drewes
Dipl. Math. Carsten Ziems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SoSe 2009
03.06.2009

7. Übungsblatt zur „Mathematik IV für Elektrotechnik/ Mathematik III für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G22 (Steife Differenzialgleichungen)

Es soll das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} y(t), \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

betrachtet werden. Es handelt sich hierbei um eine steife Differenzialgleichung.

(a) Schreibe für das explizite Euler-Verfahren mit Schrittweite $h = 1$ die Iterationsvorschrift in der Form $u_{j+1} = Au_j$, wobei A eine 2×2-Matrix ist, und führe drei Iterationsschritte aus.

(b) Schreibe für das implizite Euler-Verfahren mit Schrittweite $h = 1$ die Iterationsvorschrift in der Form $u_{j+1} = Bu_j$, wobei B eine 2×2-Matrix ist, und führe drei Iterationsschritte aus.

(c) Vergleiche die Ergebnisse aus Teil (a) und (b). Welches Verfahren beschreibt das qualitative Verhalten der gesuchten Funktion besser?

Aufgabe G23 (Stabilitätsbereich)

Es soll gezeigt werden, daß das klassische Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung (RK4) nicht L-stabil ist. Zeige dazu, dass

(a) das Polynom

$$R(q) = 1 + q + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{6}q^3 + \frac{1}{24}q^4$$

die Stabilitätsfunktion des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung ist und

(b) die Beziehung

$$|R(q)| < 1 \quad \text{für alle } q \in \mathbf{C} \text{ mit } \Re(q) < 0$$

nicht gilt.

Aufgabe G24 (Anfangswertproblem)

Gegeben sei das Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

a) Wie lautet die Verfahrensvorschrift des zugehörigen Runge-Kutta Verfahrens für das allgemeine Problem $y'(t) = f(t, y(t))$ um von $t_i, u_i \approx y(t_i)$ ausgehend u_{i+1} zu berechnen?

b) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = t + 3y(t)\ , \quad y(1) = 2.$$

Berechne mit dem oben beschriebenen Runge-Kutta Verfahren mit Schrittweite $h = 1/2$ eine Näherung für $y(2)$.

Aufgabe G25 (Butcher-Schema)

Zeige, dass das explizite Runge-Kutta-Verfahren mit dem Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & & & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}$$

mindestens Konsistenzordnung 3 besitzt.

Hausübung

Aufgabe H23 (Numerische Lösung eines Anfangswertproblems)

Betrachte das Anfangswertproblem

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

Gib für folgende Verfahren die Verfahrensgleichungen für u_{j+1} an und verwende die konstante Schrittweite $h = \frac{1}{10}$, um die Näherung u_{10} an $y(1)$ zu bestimmen:

- Verfahren von Heun,
- Klassiches Runge-Kutta-Verfahren (RK4).

Vergleiche Deine Ergebnisse miteinander, mit dem expliziten Eulerverfahren und der exakten Lösung $e = 2.7182818\ldots$.

Aufgabe H24 (Butcher-Schema)

Betrachte das Schema

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \gamma_2 & \frac{1}{3} & & \\ \gamma_3 & \frac{1}{3} & \alpha_{32} & \\ \hline & \beta_1 & \beta_2 & \frac{1}{2} \end{array}$$

Bestimme die Parameter $\gamma_2, \gamma_3, \alpha_{32}, \beta_1$ und β_2 so, dass das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren unter den Bedingungen

$$\gamma_i = \sum_j \alpha_{ij} \text{ für } i = 1, 2, 3 \quad \text{und} \quad \gamma_3 = 2\gamma_2$$

höchstmögliche Konsistenzordnung besitzt. Gib das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren an.

Aufgabe H25 (Stabilitätsbereich)

Es sei das folgende zweistufige Runge–Kutta–Verfahren zum Anfangswertproblem $y'(t) = f(t, y(t))$, $t \in [a, b]$, $y(a) = y_0$, gegeben:

$$
\begin{array}{c|cc}
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\
\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\
\hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}
$$

Berechne die Stabilitätsfunktion des zugehörigen impliziten Runge-Kutta-Verfahrens und überprüfe, ob das Verfahren L-stabil ist.

Aufgabe H26 (`Programmieraufgabe:` Eulerverfahren und Verfahren von Heun)

Implementiere das explizite Eulerverfahren und das Verfahren von Heun zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Die Verfahren sollten jeweils als Eingabeparameter den Funktionsnamen der rechten Seite der Differenzialgleichung $f(t, y(t))$, den Anfangswert y_0, die Intervallgrenzen $a = t_0$ und $b = t_n$ sowie die Schrittweite h haben und die Näherungswerte $u_0, \ldots u_n$ zurückgeben. Teste Deine Programme an den Beispielen aus Aufgabe G19 und H20.