Ergänzungen zum 6.Übungsblatt

A. Das Landau-Symbol Groß- O

Die Aussage

$$g(h) = \mathcal{O}(h^p), \quad \text{für } h \to 0$$

bedeutet, dass es eine Konstante $M > 0$ gibt, so dass gilt:

$$|g(h)| \leq M \cdot h^p \quad \text{für } h > 0.$$

$\mathcal{O}(h^p)$ ist also die Menge der Funktionen in Abhängigkeit von h, die nicht schneller als h^p wachsen. $\mathcal{O}$ wird auch „Groß-O"genannt und gehört zu den sogenannten Landau-Symbolen.

B. Kettenregel im Mehrdimensionalen:

Seien $U \subset \mathbf{R}^n$ und $V \subset \mathbf{R}^m$ offene Mengen, $g : U \to \mathbf{R}^m$ und $h : V \to \mathbf{R}^k$ Abbildungen mit $g(U) \subset V$. g sei im Punkt $x \in U$ differenzierbar und h im Punkt $g(x)$. Dann ist die zusammengesetzte Abbildung

$$h \circ g : U \to \mathbf{R}^k$$

im Punkt x differenzierbar und für ihr Differential gilt:

$$D(h \circ g)(x) = Dh(g(x))D(g(x)).$$

Im Spezialfall $f(t, y(t))$ gilt mit den Bezeichnungen

$$g(t) := \begin{pmatrix} t \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad h(x_1, x_2) := f(x_1, x_2),$$

also

$$(h \circ g)(t) = h(g(t)) = f(t, y(t)).$$

Wegen

$$(Dh)(x) = [\frac{\delta f}{\delta x_1}(x), \frac{\delta f}{\delta x_2}(x)]$$

und

$$(Dg)(t) = \begin{pmatrix} \frac{\delta g_1}{\delta t} \\ \frac{\delta g_2}{\delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(t) \end{pmatrix},$$

gilt damit für die Ableitung

$$(Df)(t) = D(h \circ g)(t) = [\frac{\delta f}{\delta t}(g(t)), \frac{\delta f}{\delta y}(g(t))] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y'(t) \end{pmatrix} =$$

$$\frac{\delta f}{\delta t}(g(t)) + \frac{\delta f}{\delta y}(g(t)) \cdot y'(t) = f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t)) \cdot f(t, y(t)),$$

wobei f_t bzw. f_y die partiellen Ableitungen von f nach t bzw. y bezeichnen.