Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Sarah Drewes
Dipl.-Math. Carsten Ziems

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SoSe 2009
27.05.2009

6. Übungsblatt zur „Mathematik IV für Elektrotechnik/ Mathematik III für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G18 (Globalisiertes Newton-Verfahren)

Wir betrachten wieder die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus Aufgabe G17, also

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

In G17 haben wir gezeigt, dass das lokale Newton-Verfahren für Startwerte mit $|x^0| > 1$ nicht konvergiert.

(a) Verwende nun das globalisierte Newton-Verfahren mit der Schrittweitenregel von Armijo, um für den Startpunkt $x^{(0)} = 2$ eine Nullstelle von F zu berechnen .

(b) Veranschauliche Dir das Verfahren und die Schrittweitensuche an einer Skizze, d.h. zeichne die Iterierten $x^{(k)}$ in Deine Skizze der Funktion aus Aufgabe G17 ein.

(c) Welchen Wert hat der Index l aus Satz 6.2.2, ii) in diesem Beispiel?

Aufgabe G19 (Numerische Lösung eines Anfangswertproblems)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = 2y - e^t, \quad y(0) = 2.$$

(a) Verwende nun die folgenden numerischen Verfahren mit Schrittweite 0.5, um auf dem Intervall $[0, 1]$ Näherungswerte für $y(t)$ zu bestimmen:

- Explizites Euler-Verfahren,
- Verfahren von Heun,
- Klassisches Runge-Kutta-Verfahren (4.Ordnung).

(b) Die analytische Lösung dieses AWPs lässt sich z.B. durch Variation der Konstanten berechnen und lautet

$$y(t) = (e^{-t} + 1)e^{2t} = e^t + e^{2t}.$$

Skizziere und vergleiche Deine Ergebnisse mit der analytischen Lösung und beurteile ihre Qualität.

Aufgabe G20 (Konsistenz des implizites Euler-Verfahrens)

Zeige, dass das implizite Euler–Verfahren zur Lösung eines Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [a, b],$$

wobei $f : [a, b] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ stetig differenzierbar sei, konsistent von der Ordnung 1 ist.

Aufgabe G21 (Butcher-Schema)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = ty(t), \quad y(0) = 1,$$

mit der exakten Lösung $y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$, sowie das folgende zweistufige, explizite Runge–Kutta Verfahren mittels des dazugehörigen Butcher–Schemas

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}.$$

a) Berechne zu dem gegebenen Anfangswertproblem die Verfahrensfunktion des Runge–Kutta Verfahrens zu dem Butcher–Schema.

b) Berechne eine Näherung an $y(1)$ mit Schrittweite $\frac{1}{2}$ mit dem gegebenen Runge–Kutta Verfahren.

c) Gib den (globalen) Diskretisierungsfehler des Runge–Kutta Verfahrens in $t = 1$ an.

Hausübung

Aufgabe H19 (Newton-Verfahren)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift $f(x) = x^3 - x$.

a) Skizziere den Graphen der Funktion im Intervall $[-2, 2]$.

b) Führe 4 Schritte des Newton–Verfahrens durch, beginnend mit dem Startpunkt $x^{(0)} = 2$. Trage die einzelnen Schritte in die Skizze ein.

c) Ist der Startpunkt $x^{(0)} = 0.51$ geeignet um die Nullstelle $x_N = 0$ mit dem Newton-Verfahren zu finden ?

d) Bestimme ein maximales Intervall um $x_N = 0$, so daß jeder Startpunkt $x^{(0)}$ aus diesem Intervall gegen $x_N = 0$ konvergiert.

e) Welche Startpunkte sind ungeeignet, um mit dem Newton-Verfahren eine Nullstelle zu finden.

Aufgabe H20 (Entladung eines Kondensators)

Wir betrachten die Entladung eines Kondensators der Kapazität C über einem Ohmschen Widerstand R. Der Schalter S werde zur Zeit $t = 0$ geschlossen; zu diesem Zeitpunkt sei die Spannung am Kondensator U_0. Bezeichnet man mit $U = U(t), t \geq 0$ die Spannung am Kondensator und mit $U_R(t)$ den Spannungsabfall am Widerstand R, so muss offenbar zu jedem Zeitpunkt t gelten:

$$U_R(t) + U(t) = 0,$$

wobei nach dem Ohmschen Gesetz $U_R(t) = R \cdot I(t)$ gilt für die Stromstärke $I(t)$. Die Elektrische Ladung des Kondensators ist $Q(t) = CU(t)$. Für einen idealen Kondensator gilt die Differenzialgleichung $I(t) = Q'(t)$. Damit erhält man für die Spannung $U(t)$ am Kondensator die folgende lineare Differenzialgleichung

$$U'(t) + \frac{1}{RC}U(t) = 0,$$

mit dem Anfangwert $U(0) = U_0$.

(a) Löse dieses Anfangswertroblem mithilfe der Trennung der Veränderlichen.

(b) Sei nun $U_0 = 1$, $R = 2$ und $C = \frac{1}{4}$. Berechne sowohl mit dem expliziten Eulerverfahren, als auch mit dem modifizierten Eulerverfahren (2.Runge-Kutta-Verfahren 2.Ordnung) jeweils mit Schrittweite $h = \frac{2}{3}$ Näherungswerte für die Lösung des gegebenen Anfangswertproblems im Intervall $[0, 2]$.

(c) Beurteile Deine drei Näherungswerte, indem Du sie miteinander und mit der exakten Lösung vergleichst.

Aufgabe H21 (Konsistenz der impliziten Trapezregel)

Zeige, daß die implizite Trapezregel $u_{j+1} = u_j + \frac{h}{2}(f(t_j, u_j) + f(t_{j+1}, u_{j+1}))$ zur Lösung eines Anfangswertproblems $y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [a, b]$, wobei $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar sei, konsistent von der Ordnung 2 ist.
Hinweis: Benutze eine Taylorentwicklung für $y(t + h)$ der Ordnung 3 (also bis $\mathcal{O}(h^3)$) und für $f(t + h, y(t + h))$ der Ordnung 2 nach h in $h = 0$.

Aufgabe H22 (Programmieraufgabe: Lokales Newton-Verfahren)

(a) Schreibe ein Programm in einer Programmiersprache Deiner Wahl, welches das lokale Newton-Verfahren aus der Vorlesung implementiert. Das Verfahren terminiere, falls $\|F(x^{(k)})\| \leq tol$ oder $k \geq k_{\text{max}}$. Es sollte folgende Eingabeparameter haben: Die Funktion $F(x)$ und deren Ableitung, den Startpunkt x^0 und die Anzahl von Iterationen k_{max}, die maximal durchgeführt werden sollen, sowie die Toleranz tol.
Ausgegeben werden sollte der letzte Iterationspunkt x^k, die Anzahl der benötigten Iterationen k und der aktuelle Funktionswert $F(x^k)$ bzw. ein Hinweis auf Erfolg oder Misserfolg des Verfahrens.

(b) Teste Dein Verfahren an den folgenden Funktionen:

- $F1(x) = x^3 - x$, für Startpunkte: $x^0 \in \{2, 0.5, -0.5, 0.4\}$.
- $F2(x) = \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$, für Startpunkte $x^0 \in \{1, 3, -1\}$.
- $F3(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$, für Startpunkte $x^0 \in \{2, -1, 0, 0.00001, 10\}$.
- $F4(x) = \sin(12 \cdot x)$, für Startpunkte $x^0 \in \{0.1, 0.09, 3.14\}$.

(c) Teste Dein Programm ausserdem für weitere sinnvolle Startwerte Deiner Wahl und versuche das Verhalten Deines Programms für die obigen Funktionen zu erklären.