Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl. Math. Sarah Drewes
Dipl. Math. Carsten Ziems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SoSe 2009
20.05.2009

5. Übungsblatt zur „Mathematik IV für Elektrotechnik/ Mathematik III für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G15 (Exaktheit der Quadratur)

Prüfe, ob die folgenden Formeln zur Berechnung des Integrals $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ exakt vom Grad 2 sind, also $I(f) = J(f)$ für alle Polynome vom Grad kleinergleich 2.

a) $J(f) = \frac{b-a}{10}(f(a) + 4f(a + \frac{b-a}{3}) + 4f(b - \frac{b-a}{3}) + f(b))$

b) $J(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$

Die zweite Formel entspricht der Simpsonregel. Zeige zudem, dass die Simpsonregel Polynome bis zum Grad 3 exakt integriert, jedoch nicht alle Polynome vom Grad 4.
Hinweis: Wieso ist der Nachweis für die Basiselemente x^k des Polynomraums ausreichend?
Es genügt das Integrationsintervall $[-1, 1]$ zu betrachten.

Aufgabe G16 (Summierte Trapezregel)

Berechne für das Integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+3}\,dx$$

eine Näherung mit Hilfe der summierten Trapezregel und schätze den Fehler ab. Zerlege dafür das Intervall $[-1, 1]$ in zwei gleich große Teilintervalle.

Vergleiche das Ergebnis mit denen aus Aufgabe G14 (a), (b), welche Näherung liefert das bessere Ergebnis und welche die bessere Fehlerschranke?

Aufgabe G17 (Newton-Verfahren)

Gegeben sei die Funktion $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(a) Skizziere den Graphen der Funktion im Intervall $[-10, 10]$.

(b) Bestimme die Iterationsvorschrift zur Berechnung einer Nullstelle von F mit dem Newton-Verfahren.

(c) Zeige, dass das (lokale) Newton-Verfahren für Startwerte mit $|x| > 1$ nicht konvergiert. Was passiert für $|x| = 1$?

Bitte wenden!

Hausübung

Aufgabe H15 (Quadratur)

a) Berechne mit der summierten Trapezregel eine Annäherung an das Integral $\int_0^\pi \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$, indem Du das Intervall in zwei gleich große Teilintervalle zerlegst.

b) Bis zu welchem Grad werden Polynome auf dem Intervall $[0, \pi]$ mit der summierten Trapezregel mit zwei gleich großen Teilintervallen auf $[0, \pi]$ exakt integriert? Begründe Deine Antwort.

c) Gib für die summierte Trapezregel eine möglichst minimale Anzahl m von Teilintervallen an, so dass der Quadraturfehler bei der Berechnung von $I(\sin^2(x)) = \int_0^\pi \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$ höchstens 10^{-3} beträgt.

Aufgabe H16 (Rechteckregel)

Eine andere Klasse von Quadraturformeln ergibt sich, wenn man die Knoten frei variieren lässt. Bei einem einzigen Knoten ergibt sich die Formel

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\omega_0 f(x_0).$$

a) Bestimme die Werte für ω_0 und x_0 so, dass die Quadraturformel beliebige Polynome bis zum Grad 1 exakt integriert. Betrachte zuerst den Spezialfall $a = 0,\ b = 1$ und bestimme anschließend die Formel für den Allgemeinfall.

b) Zeige, dass ein Polynom vom Grad 2 existiert welches die in a) erhaltene Rechteckregel nicht exakt integriert.

Aufgabe H17 (Newton-Verfahren)

Gegeben sei die Funktion

$$F(x) \quad := \quad \begin{pmatrix} 2\cdot x_1 - x_2 - \frac{1}{10}\cdot(1+x_1^4)^{\frac{1}{4}} \\ -x_1 + 4\cdot x_2 - e^{-x_1^2}\cdot\cos x_2 \end{pmatrix}$$

für $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$

a) Gib das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Iterierten $x^{(k+1)}$, ($k = 0, 1, ...$) an, welches bei der Anwendung des Newton-Verfahrens auf das nichtlineare Gleichungssystem $F(x) = 0$ entsteht.

b) Berechne zum Startvektor $x^{(0)} = (0, 0)^T$ die Näherung $x^{(1)}$.

Aufgabe H18 (`Programmieraufgabe:` Newtoninterpolation)

(a) Implementiere ein Programm, das zu $n + 1$ Stützstellen (x_i, y_i) $(i = 0, \ldots n)$ den Wert des zugehörigen Newtoninterpolationspolynoms an einer Stelle x zurückgibt. Schreibe dazu eine Routine, die mit Hilfe der dividierten Differenzen die Werte $\gamma_0, \ldots \gamma_n$ berechnet und eine weitere Routine, die das Interpolationspolylom $p_n(x)$ an der Stelle x auswertet.
Teste Dein Programm für die Stützstellen des Beispiels aus Aufgabe G10.

(b) Implementiere nun eine Erweiterung Deines Programms, das für eine Funktion $f(x)$ den Wert $p_n(x)$ des zugehörigen Newtoninterpolationspolynoms auf einem Intervall $[a, b]$ mit $n+1$ äquidistanten Stützstellen berechnet. Teste Dein Programm wieder am Beispiel aus Aufgabe G10 und für die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ für jeweils 6 bzw. 11 Stützstellen auf dem Intervall $[-5, 5]$. Vergleiche anschliessend das Interpolationspolynom mit der Funktion f.