Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Sarah Drewes
Dipl.-Math. Carsten Ziems

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SoSe 2009
11.05.2009

4. Übungsblatt zur „Mathematik IV für Elektrotechnik/ Mathematik III für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G12 (Kubische Splines)

Gegeben sei die Funktion

$$f : [-1,1] \to [1,2] : x \mapsto 2^{\cos(\frac{\pi}{2}x)}.$$

Interpoliere die Funktion f durch kubische Splines. Verwende dabei die Zerlegung $\Delta = \{-1, 0, 1\}$ und natürliche Randbedingungen.

Aufgabe G13 (Inverse Interpolation)

Gegeben sei die Funktion

$$f : [0,1] \to [-1, \tfrac{3}{4}] : x \mapsto x^2 - \frac{1}{4^x}.$$

(a) Zeige, daß die Funktion f eine Umkehrfunktion besitzt.

(b) Berechne ein Newtonsches Interpolationspolynom vom Grad 2 zur *Umkehrfunktion* von f. Versuche dabei die Stützstellen so zu wählen, daß die Stützstellen sowie die zugehörigen Funktionswerte rational sind.

Aufgabe G14 (Geschlossene Newton-Cotes-Quadratur)

Wir betrachten das Integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+3}\, dx$$

mit dem Wert $\ln(2)$.

(a) (Simpson-Regel)
Berechne eine Näherung für $\ln(2)$ durch eine näherungsweise Berechnung des gegebenen Integrals mit Hilfe der Simpson-Regel (d.h. mit der geschlossenen Newton-Cotes-Formel für $n = 2$) und schätze den Fehler ab.

(b) (3/8-Regel)
Läßt sich die Näherung für $\ln(2)$ verbessern, wenn anstatt der Simpson-Regel die 3/8-Regel (d.h. die geschlossene Newton-Cotes-Formel für $n = 3$) verwendet wird? Vergleiche sowohl die Fehlerabschätzungen als auch die Näherungswerte mit dem 'exakten' Wert von $\ln 2 = 0.69314718055994530942\ldots$.

Hausübung

Aufgabe H11 (Kubische Splines)

Interpoliere die Funktion

$$f : [0, 2] \to [-1, 1] : x \mapsto \sin(\pi x)$$

durch kubische Splines. Verwende dabei die Zerlegung

$$\Delta = \{0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 2\}$$

und natürliche Randbedingungen.

Aufgabe H12 (Quadratische Splines)

Ein quadratischer Spline $s \in S_{\Delta,2}$ ist nach Definition einmal stetig differenzierbar und aus quadratischen Polynomen zusammengesetzt. Dann ist $s'(x)$ offensichtlich stetig und stückweise linear. Es bietet sich also an, s_i durch Integration von s_i' zu bestimmen. Seien $Q_i = s'(x_i)$, für $i = 0, \dots, n$. Dann gilt nach (4.7) der Vorlesung

$$s_i'(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} Q_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} Q_{i+1}, \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Durch einfache Intergration ergibt sich folgender Ansatz:

$$s_i(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{(x - x_i)^2}{(x_{i+1} - x_i)} Q_{i+1} - \frac{(x_{i+1} - x)^2}{(x_{i+1} - x_i)} Q_i \right] + c_i.$$

Wir wollen nun analog zum kubischen Fall (siehe Vorlesung) Bestimmungsgleichungen für die Q_i herleiten:

(a) Bestimme mit Hilfe der Bedingung $s_i(x_i) = y_i$ die Integrationskonstante c_i dieses Ansatzes.

(b) Nutze nun die Bedingung $s_{i+1}(x_{i+1}) = s_i(x_{i+1})$, um mit Hilfe von (a) n Bestimmungsgleichungen für die Q_i aufzustellen.

(c) Nimmt man nun zu den Gleichungen aus Teil (b) die Bedingung $s'(x_0) = f'(x_0)$ hinzu, so erhält man zur Bestimmung der $Q_0, \dots, Q_n$ ein Gleichungssystem

$$Hq = b,$$

mit $q = (Q_0, \dots, Q_n)^T$. Gib die Matrix H und die rechte Seite b dieses Systems an. Sind die Q_i durch dieses System eindeutig festgelegt?

(d) Stelle nun das System zur Bestimmung der $Q_0, \dots, Q_n$ für die Zusatzbedingung $s'(x_0) = s'(x_n)$ statt $s'(x_0) = f'(x_0)$ auf. Untersuche auch hier, ob die Q_i immer eindeutig festgelegt sind.

(e) Berechne für die Funktion $f(x) = \sin(\pi x)$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ den quadratischen Spline-Interpolanten mit der Zusatzbedingung aus Teil (c). Verwende die Zerlegung $\Delta = \{-1, 0, 1\}$. Skizziere die Funktion f und ihren Spline-Interpolanten.

Aufgabe H13 (Quadraturfehler)

Sei f eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Beweise selbst, dass für den Quadraturfehler der Trapezregel folgende Fehlerabschätzung gilt

$$\left| \int_a^b f(x)dx - I_1(f) \right| \leq \tfrac{5}{12} h^3 \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|.$$

Die Formel für den exakten Fehler darf hierbei nicht benutzt werden.
(Die hier zu zeigende Fehlerabschätzung ist um den Faktor fünf schlechter als diejenige aus dem Skript, dafür aber leichter zu beweisen.)
Hinweis: Man kann z.B. eine Taylorentwicklung für die Funktion $g(h) := \int_a^{a+h} f(x)dx$ in $h = 0$ aufstellen.

Aufgabe H14 (Multiple Choice: Interpolation)

Bei diesen Multiple Choice Aufgaben darf pro Frage höchstens eine Antwort angekreuzt werden. Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt. Für jedes falsche Kreuz wird ein halber Punkt abgezogen. Für kein Kreuz oder mehr als ein Kreuz pro Frage gibt es Null Punkte. Für die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe wird das Maximum aus Null und den erreichten Punkten gebildet.

(a) Ein Interpolationspolynom $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad $\leq n$, das die Interpolationsbedingung $p_n(x_i) = y_i$, $i = 0, ..., n$ für die Stützpunkte $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 0, ..., n$, $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, erfüllt,

- ◯ existiert immer und ist immer eindeutig.
- ◯ existiert immer, ist aber nicht immer eindeutig.
- ◯ existiert nicht immer und ist auch nicht immer eindeutig.

(b) Sei p_n ein Interpolationspolynom vom Grad $\leq n$ zu einer Funktion $f \in \mathrm{C}^\infty([a, b])$ auf dem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $n + 1$ äqudistant verteilten Stützstellen $x_i = a + i \cdot h$, $h = (b - a)/n$, mit $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

- ◯ immer gewährleistet, dass gilt $\lim_{n\to\infty} f(x) - p_n(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$.
- ◯ nicht immer gewährleistet, dass gilt $\lim_{n\to\infty} f(x) - p_n(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$.
- ◯ nie gewährleistet, dass gilt $\lim_{n\to\infty} f(x) - p_n(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$.

(c) Sei s ein kubischer Spline mit vier Knoten und p ein kubischer Interpolant zu den gleichen vier Knoten auf dem Intervall $[a, b]$.

- ◯ Diese Situation kann nie eintreten.
- ◯ Dann stimmen s und p überein.
- ◯ Dann gilt, dass s und p in den vier Knoten übereinstimmen; s und p stimmen aber nicht notwendig überall auf $[a, b]$ überein.