Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl. Math. Sarah Drewes
Dipl. Math. Carsten Ziems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SoSe 2009
06.05.2009

3. Übungsblatt zur „Mathematik IV für Elektrotechnik/ Mathematik III für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G8 (Iterationsverfahren)

Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, mit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne die Zeilensummennormen der Iterationsmatrizen für das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren. Folgere daraus, dass beide Verfahren für einen beliebigen Startvektor $x^{(0)} \in \mathbf{R}^2$ konvergieren. Führe dann mit jedem der beiden Verfahren zwei Iterationsschritte für den Startvektor $x^{(0)} = (-5, -7)^T$ durch.

(b) Führe nun - ebenfalls ausgehend vom Startvektor $x^{(0)} = (-5, -7)^T$ - zwei Iterationsschritte des SOR-Verfahrens mit dem Parameter $\omega = \frac{12}{10}$ durch. Rechne dabei mit Brüchen.

Aufgabe G9 (Lagrangesche Polynominterpolation)

Es seien folgende Daten gegeben:

k	0	1	2	3
x_k	1	2	3	4
y_k	-6	0	2	6

(a) Bestimme das Lagrangesche Interpolationspolynom höchstens 3. Grades, das diese Interpolationsbedingungen erfüllt.

(b) Zeichne das Interpolationspolynom und die Interpolationspunkte.

Aufgabe G10 (Newtonsche Interpolationsformel)

Gegeben sei die Funktion $f : [0, 2] \to [-1, 1] : x \mapsto \sin(\pi x)$ und die Stützstellen $\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$.

(a) Berechne das Newtonsche Interpolationspolynom mit Hilfe der dividierten Differenzen.

(b) Gib eine obere Schranke für den Abstand von f und dem Interpolationspolynom an.

(c) Um welchen Faktor verbessert sich die Schranke, wenn die Stützstellen $\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}\}$ hinzugefügt werden?

Aufgabe G11 (Spektralradius und Konvergenz)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Begründe mit geeigeneten Sätzen aus der Vorlesung, ob und wann das Jacobi-, das Gauss-Seidel-, das SOR-Verfahren für $0 < \omega \leq 1$ bzgl. A konvergieren.

(b) Prüfen Sie, ob die Voraussetzungen von Satz 3.2.9 gelten.

Hausübung

Aufgabe H7 (Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es sollen lineare Gleichungssysteme der Form $Ax = b$ mittels Iterationsverfahren gelöst werden. Beurteile anhand der zugehörigen Iterationsmatrizen $(I - B^{-1}A)$, welches der beiden folgenden Verfahren für alle Startpunkte $x^{(0)} \in \mathbf{R}^n$ konvergiert.

(a) (Jacobi-Verfahren) Hier ist

$$B = D = \mathrm{diag}(a_{11}, \cdots, a_{33}).$$

(b) (Gauß-Seidel-Verfahren) Hier ist

$$B = D - L, \text{ wobei } L = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H8 (Lagrangesche Polynominterpolation)

Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ soll mit Hilfe des Lagrange-Interpolationspolynoms $p(x)$ zwischen den Stützstellen $x_0 = \frac{1}{4}, x_1 = 1$ und $x_2 = 4$ interpoliert werden. Vergleiche die Punktauswertungen von f und p in den Punkten $x = \frac{1}{2}$ und $x = 2$. Skizziere die Graphen von f und p.

Aufgabe H9 (Interpolation)

Lese mindestens die *ersten beiden* Aufgabenteile durch bevor Du mit dem Lösen der Aufgabe beginnst.

Die unbekannte Funktion f soll durch Polynome approximiert werden.

(a) Gegeben seien die folgenden drei Stützpunkte:

i	0	1	2
x_i	0	1	2
$f(x_i) = y_i$	-1	1	2

Berechne zu diesen ein Interpolationspolynom.

(b) Als vierter Stützpunkt komme $(x_3, y_3) = (\frac{1}{2}, 0)$ zu den dreien aus Aufgabenteil (a) hinzu. Berechne zu diesen vier Stützpunkten ein Interpolationspolynom.

(c) Die Funktion f sei beliebig oft differenzierbar und über die Ableitungen sei bekannt, daß $|f^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ für alle $x \in [0,2]$ und alle $n \in \mathbf{N}$ gilt. Gebe für die in Teil (a) und (b) berechneten Interpolationspolynome *jeweils* eine Fehlerabschätzung an.

Aufgabe H10 (Multiple Choice: Iterative Verfahren für lineare Gleichungssysteme)

Bei der Multiple Choice Aufgabe darf pro Frage höchstens eine Antwort angekreuzt werden. Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt. Für jedes falsche Kreuz wird ein halber Punkt abgezogen. Für kein Kreuz oder mehr als ein Kreuz pro Frage gibt es Null Punkte. Für die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe wird das Maximum aus Null und den erreichten Punkten gebildet.

Wir betrachten lineare Gleichungssysteme der Form $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$.

(a) Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{3} & 2 & \frac{3}{2} \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

gegeben. Dann

- ○ konvergieren sowohl das Jacobi– als auch das Gauss–Seidel–Verfahren.
- ○ konvergieren weder das Jacobi– noch das Gauss–Seidel–Verfahren.
- ○ konvergiert das Jacobi–Verfahren, aber das Gauss–Seidel–Verfahren nicht.
- ○ konvergiert das Gauss–Seidel–Verfahren, aber das Jacobi–Verfahren nicht.

(b) Es seien folgende Iterationsmatrizen M_J für das Jacobi– bzw. M_{GS} für das Gauss–Seidel–Verfahren

$$M_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{7}{18} \end{pmatrix}$$

gegeben. Dann

- ○ konvergiert das Jacobi–Verfahren, aber das Gauss–Seidel–Verfahren nicht.
- ○ kann man ohne Kenntnis der Matrix A keine Aussage über die Konvergenz des Jacobi– bzw. des Gauss–Seidel–Verfahrens machen.
- ○ konvergieren weder das Jacobi– noch das Gauss–Seidel–Verfahren.
- ○ konvergiert das Gauss–Seidel–Verfahren, aber das Jacobi–Verfahren nicht.
- ○ konvergieren sowohl das Jacobi– als auch das Gauss–Seidel–Verfahren.

(c) Die Komponenten $x_i^{(k+1)}$, $i = 1, ..., n$, der $(k+1)$-ten Iterierten beim Lösen der Iterationsvorschrift $Bx^{(k+1)} = (B - A)x^{(k)} + b$ können unabhängig voneinander berechnet werden

- ○ weder beim Jacobi– noch beim Gauss–Seidel–Verfahren.
- ○ beim Gauss–Seidel–Verfahren aber nicht beim Jacobi–Verfahren.
- ○ sowohl beim Jacobi– als auch beim Gauss–Seidel–Verfahren.
- ○ beim Jacobi–Verfahren aber nicht beim Gauss–Seidel–Verfahren.