Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl. Math. Sarah Drewes
Dipl. Math. Carsten Ziems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SoSe 2009
29.04.2009

2. Übungsblatt zur „Mathematik IV für Elektrotechnik/ Mathematik III für Informatik"

Gruppenübung

Aufgabe G4 (Cholesky-Verfahren)

Bestimme die Choleskyzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Löse unter Verwendung des Ergebnisses das Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (0, -1, 4)^T$.

Aufgabe G5 (Matrixnorm & Konditionszahl)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne die Matrixnormen $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$.

(b) Berechne die Konditionszahl bezüglich der drei Matrixnormen aus Teil (a).

Aufgabe G6 (Störung der rechten Seite)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 7 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne die Konditionszahl von A bezüglich der Zeilensummennorm, die von der $\|\cdot\|_\infty$-Norm induziert wird.

(b) Die rechte Seite werde nun durch

$$\Delta b = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

gestört. Gib eine Abschätzung für den relativen Fehler der Lösung an.

(c) Löse nun die Gleichungssysteme $Ax = b$ und $A\tilde{x} = b + \Delta b$ und vergleiche mit der Abschätzung aus Teil (b).

Aufgabe G7 (Pivotsuche)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ -100 & 10 & 1 & 1000 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}.$$

Bei welchen dieser Matrizen kann auf die Pivotsuche verzichtet werden?

Hausübung

Aufgabe H4 (Cholesky-Verfahren)

Bestimme die Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Löse unter Verwendung des Ergebnisses das Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (2, 3, 2)^T$.

Aufgabe H5 (Störung der Matrix)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \Delta A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbf{R}$.

Betrachte das Gleichungssystem $Ax = b$ und das gestörte Gleichungssystem $(A + \Delta A)\tilde{x} = b$.

(a) Gib eine obere Schranke für den relativen Fehler in Abhängigkeit von α bezüglich der Spaltensummennorm und der Zeilensummennorm an.

(b) Für welche α garantieren die Schranken einen relativen Fehler von höchstens $\frac{1}{2}$?

(c) Berechne den exakten relativen Fehler für die maximalen Werte von α aus Teil (b).

Aufgabe H6 (Kondition und Fehler)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne die Konditionszahl $\mathrm{cond}_{\|.\|_\infty}(A)$.

(b) Schätze den relativen Fehler der Lösung in der Zeilensummennorm ab, wenn der Gauß-Algorithmus statt mit der Matrix A mit einer Matrix $\tilde{A}$ und statt mit der rechten Seite b mit dem Vektor $\tilde{b}$ gerechnet wird , für die gilt:

$$\|\tilde{A} - A\|_\infty = \|\Delta A\|_\infty \leq 0.02 \qquad \text{und} \qquad \|\tilde{b} - b\|_\infty = \|\Delta b\|_\infty \leq 0.001.$$

(c) Berechne die exakte Lösung des Gleichungssystems und des mit folgenden Matrizen gestörten Gleichungssystems

$$\Delta A = \begin{pmatrix} -0.01 & 0.01 \\ 0.01 & -0.01 \end{pmatrix}, \qquad \Delta b = \begin{pmatrix} -0.001 \\ 0.001 \end{pmatrix}.$$

Vergleiche den Unterschied beider Ergebnisse mit der in (b) gemachten Abschätzung.