Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dr. Dominique Küpper
Dr. Sarah Drewes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SoSe 2010
28./29./30.04.2010

2. Übungsblatt zur „Mathematik IV für Elektrotechnik/ Mathematik III für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G4 (Fehlerabschätzung der Spline-Interpolation)

Schätze für Aufgabe H3 des 1. Übungsblattes, also für $f : [0,2] \mapsto [-1,1]$, $f(x) := \sin(\pi x)$ und die Zerlegung $\Delta = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$ den Fehler

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - s(x)|$$

der kubische Spline-Interpolation mit Hermite-Randbedingungen ab. Vergleiche diese Abschätzung mit der Fehlerabschätzung, die man in diesem Fall für lineare Splines erhält.

Aufgabe G5 (Gaußsches Eliminationsverfahren)

Betrachte

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Wende das Gaußsche Eliminationsverfahren mit Spaltenpivotsuche auf (A, b) an. Als Ergebnis erhältst Du Matrizen L und R sowie den Vektor c.

(b) Löse das gestaffelte System $Rx = c$.

(c) Bestimme die Permutationsmatrix der Zerlegung $PA = LR$.

(d) Jede Zeilenvertauschung, also jeder Übergang $(A^{(k)}, b^{(k)}) \mapsto (\tilde{A}^{(k)}, \tilde{b}^{(k)})$ ist durch Matrixmulitplikation darstellbar. Gib für jede Iteration ($k = 1, \ldots n-1$) die Matrix P_k an, für die gilt: $(\tilde{A}^{(k)}, \tilde{b}^{(k)}) = P_k(A^{(k)}, b^{(k)})$ und verifiziere $P = P_{n-1} \cdots P_1$.

Aufgabe G6 (Gauß-Algorithmus und Rundungsfehler)

Berechne zunächst die exakte Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{200} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem kann man mit Hilfe des Gauß-Algorithmus lösen, indem man das Gauß-Eliminationsverfahren auf die Matrix und die rechte Seite anwendet und dann das gestaffelte System $Rx = c$ löst. Löse das System nun mit Hilfe des Gaußalgorithmus

(a) ohne Pivotsuche,

(b) mit Spaltenpivotsuche.

Rechne dabei mit 2 signifikanten Dezimalstellen (d.h. nach jedem Schritt auf 2 Stellen runden).

Beurteile die Qualität der Lösungen.

Hausübung

Aufgabe H4 (Inverse Interpolation)

Gegeben sei die Funktion

$$f : [0,1] \to [-1, \tfrac{3}{4}] : x \mapsto x^2 - \frac{1}{4^x}.$$

(a) Zeige, daß die Funktion f eine Umkehrfunktion besitzt.

(b) Berechne ein Newtonsches Interpolationspolynom vom Grad 2 zur *Umkehrfunktion* von f. Versuche dabei die Stützstellen so zu wählen, daß die Stützstellen sowie die zugehörigen Funktionswerte rational sind.

Aufgabe H5 (Gaußsches Eliminationsverfahren)

Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Wende das Gaußsche Eliminationsverfahren mit Spaltenpivotsuche (Algorithmus 1) auf A und b an. Als Ergebnis erhältst Du eine linke untere Dreiecksmatrix L, eine rechte obere Dreiecksmatrix R und eine rechte Seite c.

(b) Bestimme die Permutationsmatrix P, für die gilt: $PA = LR$.

(c) Berechne eine Lösung des gestaffelten Systems $Rx = c$.

Aufgabe H6 (Gauß-Algorithmus und Rundungsfehler)

Berechne die exakte Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 200 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Löse dieses Gleichungssystem dann mit Hilfe des Gauß-Algorithmus

(a) ohne Pivotsuche,

(b) mit Spaltenpivotsuche,

(c) mit vollständiger Pivotsuche.

Rechne dabei mit 2 signifikanten Dezimalstellen (d.h. nach jedem Schritt auf 2 Stellen runden).

Beurteile die Qualität der Lösungen.

Aufgabe H7 (`Programmieraufgabe:` Newtoninterpolation)

(a) Implementiere ein Programm, das zu $n + 1$ Stützstellen (x_i, y_i) $(i = 0, \ldots n)$ den Wert des zugehörigen Newtoninterpolationspolynoms an einer Stelle x zurückgibt. Schreibe dazu eine Routine, die mit Hilfe der dividierten Differenzen die Werte $\gamma_0, \ldots \gamma_n$ berechnet und eine weitere Routine, die das Interpolationspolylom $p_n(x)$ an der Stelle x auswertet.
Teste Dein Programm für die Stützstellen des Beispiels aus Aufgabe G2.

(b) Implementiere nun eine Erweiterung Deines Programms, das für eine Funktion $f(x)$ den Wert $p_n(x)$ des zugehörigen Newtoninterpolationspolynoms auf einem Intervall $[a, b]$ mit $n+1$ äquidistanten Stützstellen berechnet. Teste Dein Programm wieder am Beispiel aus Aufgabe G2 und für die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ für jeweils 6 bzw. 11 Stützstellen auf dem Intervall $[-5, 5]$. Vergleiche anschliessend das Interpolationspolynom mit der Funktion f.

Hinweis zu den Programmieraufgaben:
Wir empfehlen die Bearbeitung der gestellten Programmieraufgaben in **Matlab**. Die Lösungshinweise werden ebenfalls in Matlab erstellt. Falls Sie keinen Zugang zu Matlab haben, können Sie stattdessen auch die frei verfügbare Software **Octave** verwenden. Links und Informationen zu Matlab und Octave finden Sie auf unserer Webseite.