Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Sarah Drewes
Dipl.-Math. Carsten Ziems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SoSe 2009
22.04.2009

1. Übungsblatt zur „Mathematik IV für Elektrotechnik/ Mathematik III für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen)

Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimme den Rang von A.

(b) Untersuche, ob die linearen Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2$, lösbar sind, wobei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G2 (Gaußsches Eliminationsverfahren)

Betrachte

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Wende das Gaußsche Eliminationsverfahren mit Spaltenpivotsuche auf (A, b) an. Als Ergebnis erhältst Du Matrizen L und R sowie den Vektor c.

(b) Löse das gestaffelte System $Rx = c$.

(c) Bestimme die Permutationsmatrix der Zerlegung $PA = LR$.

(d) Jede Zeilenvertauschung, also jeder Übergang $(A^{(k)}, b^{(k)}) \mapsto (\tilde{A}^{(k)}, \tilde{b}^{(k)})$ ist durch Matrixmulitplikation darstellbar. Gib für jede Iteration ($k = 1, \ldots n-1$) die Matrix P_k an, für die gilt: $(\tilde{A}^{(k)}, \tilde{b}^{(k)}) = P_k(A^{(k)}, b^{(k)})$ und verifiziere $P = P_{n-1} \cdots P_1$.

Aufgabe G3 (Gauß-Algorithmus und Rundungsfehler)

Berechne zunächst die exakte Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{200} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem kann man mit Hilfe des Gauß-Algorithmus lösen, indem man das Gauß-Eliminationsverfahren auf die Matrix und die rechte Seite anwendet und dann das gestaffelte System $Rx = c$ löst. Löse das System nun mit Hilfe des Gaußalgorithmus

(a) ohne Pivotsuche,

(b) mit Spaltenpivotsuche.

Rechne dabei mit 2 signifikanten Dezimalstellen (d.h. nach jedem Schritt auf 2 Stellen runden).

Beurteile die Qualität der Lösungen.

Hausübung

Aufgabe H1 (Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen)

Gegeben seien die drei Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimme jeweils den Rang von A, B und C.

(b) Wir betrachten die linearen Gleichungssysteme $Ax = a$, $Bx = b$ und $Cx = c$. Ein LGS ist unlösbar oder es hat genau eine Lösung oder es gibt unendlich viele Lösungen.
Welche der drei Fälle sind in obigen Gleichungssystemen jeweils möglich? Welche Dimension hat der Lösungsraum? Gib gegebenenfalls eine rechte Seite an, für die ein bestimmter Fall eintritt. Begründe in den übrigen Fällen, warum er jeweils nicht eintreten kann.

Aufgabe H2 (Gaußsches Eliminationsverfahren)

Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Wende das Gaußsche Eliminationsverfahren mit Spaltenpivotsuche (Algorithmus 1) auf A und b an. Als Ergebnis erhältst Du eine linke untere Dreiecksmatrix L, eine rechte obere Dreiecksmatrix R und eine rechte Seite c.

(b) Bestimme die Permutationsmatrix P, für die gilt: $PA = LR$.

(c) Berechne eine Lösung des gestaffelten Systems $Rx = c$.

Aufgabe H3 (Gauß-Algorithmus und Rundungsfehler)

Berechne die exakte Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 200 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Löse dieses Gleichungssystem dann mit Hilfe des Gauß-Algorithmus

(a) ohne Pivotsuche,

(b) mit Spaltenpivotsuche,

(c) mit vollständiger Pivotsuche.

Rechne dabei mit 2 signifikanten Dezimalstellen (d.h. nach jedem Schritt auf 2 Stellen runden).

Beurteile die Qualität der Lösungen.