Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dr. Birgit Debrabant
Dominique Küpper
Stefan Löbig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS2009
17.07.2009

14. Tutorium „Analysis 1 für Mathematik, LAG/Mathematik, Physik“

Der Satz von Taylor

Aufgabe T1

(a) Finden Sie $\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n}$.
Hinweis: de l'Hospital nach einer Substitution.

(b) Sei

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f beliebig oft differenzierbar ist, und bestimmen Sie das Taylorpolynom $P_{n,a}$ vom Grad n der Funktion f im Punkt $a = 0$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n(\frac{1}{x})$, wobei P_n ein Polynom ist.

Aufgabe T2

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}.$$

(a) Beweisen Sie $\lim_{n\to\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

(b) Beweisen Sie, dass zu jedem $x > 0$ und jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $t \in (0, x)$ mit

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \binom{\alpha}{n+1} (1+t)^{\alpha-n-1} x^{n+1}$$

existiert.

(c) Beweisen Sie, dass

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

für alle reellen $x \in (0, 1)$ gilt.