Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Dr. B. Debrabant
D. Küpper
S. Löbig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

02./03.07.2009

Analysis 1 für M, LaG M, Tutorium 12

A 1 Monotonie

Es sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$ monoton steigende Funktionen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Ausagen:

a) Die Funktion $-f : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -f(x)$ ist monoton fallend.

b) Die Funktion $fg : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)g(x)$ ist monoton steigend.

c) Die Funktion $f + g : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) + g(x)$ ist monoton steigend.

d) Sei $f(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Die Funktion $\frac{1}{f} : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ ist monoton fallend.

A 2 Exponentialfunktion

Es sei $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die in Kapitel 6.4.1. definierte Exponentialfunktion.

a) Zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ die Gleichheit $\exp(z) = \exp(w)$ genau dann gilt, wenn $z - w = i2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist.

b) Skizzieren Sie die Bilder $\exp(M_{Im})$ bzw. $\exp(M_\alpha)$ der Mengen

$$M_{Im} = i\mathbb{R} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\} \quad \text{und} \quad M_\alpha := i\alpha + \mathbb{R} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = \alpha\}$$

für $\alpha \in [0, 2\pi]$.

c) Finden Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, so dass $\exp(\alpha\beta) \neq \exp(\alpha)^\beta$ (d.h. $e^{(\alpha\beta)} \neq (e^\alpha)^\beta$) gilt.

d) Bestimmen Sie eine Menge $M \subset \mathbb{C}$, so dass $\exp|_M : M \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ bijektiv ist.

A 3 Potenzen zu beliebiger Basis

Zeigen Sie: Es gibt $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $a > 0$, so dass $a^b \in \mathbb{Q}$ ist.