Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Dr. B. Debrabant
D. Küpper
S. Löbig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

18./19.06.2009

# Analysis 1 für M, LaG M, Tutorium 10

## A 1 Lineare Funktionen

Bestimmen Sie alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die der folgenden „Funktionalgleichung“ genügen:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst für $\lambda \in \mathbb{Z}$, danach für $\lambda \in \mathbb{Q}$ und zuletzt für $\lambda \in \mathbb{R}$, dass $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$ ist.

## A 2 Oft aber nicht immer unstetige Funktion

Untersuchen Sie, in welchen Punkten die Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0,1), \\ \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0,1),\ p \text{ und } q \in \mathbb{Z},\ p,\ q \text{ teilerfremd} \end{cases}$$

stetig ist.

Hinweis: Untersuchen Sie einzeln, ob $f$ in rationalen Punkten bzw. in irrationalen Punkten stetig ist.

## A 3 Nochmal Reihen

In einigen Büchern findet man folgende **falsche** Aussage:

*Eine Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *mit* $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$ *ist divergent.*

Finden Sie zu jedem $\alpha \in (1, \infty)$ eine konvergente Reihe, mit $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \alpha$.