Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Dr. B. Debrabant
D. Küpper
S. Löbig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

12.06.2009

Analysis 1 für M, LaG M, Tutorium 9

A 1 Ein Beispiel

Sei $p \in \mathbb{C}$ mit $|p| < 1$. Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)p^k,$$

indem Sie sie künstlich als Cauchy Produkt schreiben.

A 2 Im Dreieck summieren

Im Folgenden wird ein alternativer Beweis zum Cauchy Produkt (Folgerung 5.17) geführt. Dieser verwendet eine Vertauschung der Summationsreihenfolge beim Summieren über Dreiecke. Letztere ist auch in vielen anderen Zusammenhängen nützlich.

1. Es seien $a_{n,k} \in \mathbb{C}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Beweisen Sie durch Induktion, dass für alle $m \in \mathbb{N}$
$$\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{n=k}^{m} a_{n,k}$$
gilt.
2. Sei nun für alle k die Reihe $\sum_{n=k}^{\infty} a_{n,k}$ absolut konvergent und setze $b_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_{n,k}$. Sei außerdem die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} |a_{n,k}|\right)$ konvergent. Zeigen Sie, dass in diesem Fall
$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} a_{n,k}$$
gilt, wobei die letzte Reihe als $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zu verstehen ist.
3. Verwenden Sie Teil 2, um den Satz über das Cauchy-Produkt zu beweisen: Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei absolut konvergente Reihen. Beweise, dass dann auch $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert, wobei $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k$ mit
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$