Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Dr. B. Debrabant
D. Küpper
S. Löbig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

04./05.06.2009

Analysis 1 für M, LaG M, Tutorium 8

A 1 Verdichtungssatz von Cauchy

a) Beweise den folgenden Satz: Sei (c_n) eine monoton fallende Folge mit $c_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergiert genau dann, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k c_{2^k}$ konvergiert.

Hinweis: $c_{2^k} + \cdots + c_{2^{k+1}-1} \leq 2^k c_{2^k}$ und $c_{2^{k-1}+1} + \cdots + c_{2^k} \geq 2^{k-1} c_{2^k}$ für $k > 2$.

b) Für welche reellen $\alpha > 0$ konvergieren die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^{\alpha}}$$

A 2 Weg ins Nirvana

Frei nach Buddha: Der Weg zum Nirvana ist einen Meter breit und mit einer Folge von Platten $P_1, P_2, \ldots$ der gemeinsamen Breite 1 und den Längen $l_1, l_2, l_3, \ldots$ (mit $l_i > 0$ und $l_1 \neq 1$) lückenlos gepflastert. Von der zweiten Platte an ist jede Platte P_n ähnlich, aber nicht kongruent [1] zu dem bis dahin (mit den Platten $P_1, \ldots, P_{n-1}$) gepflasterten Teil des Weges.

Zeige, dass der Weg ins Nirvana unendlich lang ist.

A 3 Wurzel- und Quotientenkriterium

Sei eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gegeben, wobei $a_n \neq 0$ für $n \in \mathbb{N}$.

Beweise: Wenn $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = q$ mit $q < 1$, dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$.

Beweise, dass die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt.

[1] Zwei Rechtecke mit Seitenlängen $a \leq b$ bzw. $\tilde{a} \leq \tilde{b}$ heißen ähnlich, wenn $\frac{a}{b} = \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}$ gilt. Sie heißen kongruent, wenn sie zusätzlich gleiche Flächen haben.