Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dr. Birgit Debrabant
Dominique Küpper
Stefan Löbig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS2009
28./29.05.2009

7. Tutorium „Analysis 1 für Mathematik, LAG/Mathematik, Physik“

Aufgabe T25 (Ein Beispiel)
Sei $x_0 \in (0,1)$ und $x_{n+1} := x_n(2-x_n)$. Hat diese Folge einen Grenzwert?
Es gibt zwei verschiedene Lösungswege, die hier beide gefunden werden sollen.

(a) Leiten Sie aus der rekursiven Vorschrift Eigenschaften ab, die Aussagen über die Konvergenz liefern.

(b) Finden Sie eine Darstellung von a_n, die von a_0 und n, aber nicht mehr von a_{n-1} abhängt und die also insbesondere nicht mehr rekursiv ist. Daraus lassen sich die Konvergenzeigenschaften ganz leicht ablesen.

Aufgabe T26 (Sukzessive Mittelpunkte)
Gegeben sei die Strecke AB. Wir definieren eine Folge von Punkten (M_n) durch:

$$M_1 := A, \quad M_2 := B, \quad M_n := \text{Mittelpunkt der Strecke } M_{n-2}M_{n-1} \text{ für } n > 2.$$

Von nun an nehmen wir an, dass alle Punkte M_n für $n \geq 1$ komplexe Zahlen sind. Dann gilt $M_n = \frac{M_{n-1}+M_{n-2}}{2}$. (Machen Sie sich dies an einem Bild klar).
Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} M_n$. (Die Antwort ist zu beweisen)
Hinweis: Beweisen Sie $M_n = A + \frac{2}{3}(1-(-\frac{1}{2})^{n-1})(B-A)$.

Aufgabe T27 (Das arithmetisch-geometrische Mittel)
Es seien zwei Zahlen a und b mit $a \geq b > 0$ gegeben. Beginnend mit

$$a_0 := a \quad \text{und} \quad b_0 := b$$

berechnet man sukzessiv das arithmetische Mittel a_n und das geometrische Mittel b_n nach der Rekursionsvorschift

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{und} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

(a) Beweisen Sie die Ungleichungen

$$a \geq a_n \geq a_{n+1} \geq b_{n+1} \geq b_n \geq b$$

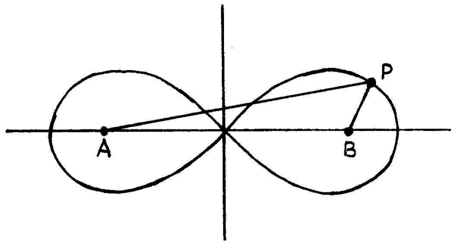
und folgern Sie, dass die beiden Folgen (a_n) und (b_n) konvergieren.
Hinweis: Verwenden Sie $\min\{a,b\} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$ für $a, b \geq 0$.

(b) Zeigen Sie, dass beide Folgen den gleichen Grenzwert haben. Dieser Grenzwert heißt arithmetisch-geometrisches Mittel $M(a,b)$.

(c) Beweisen Sie

$$M(a,b) = M\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) \quad \text{und} \quad M(a,b) = aM\left(1, \frac{b}{a}\right).$$

Anmerkung: Für $a > 0$ betrachten wir die Punkte $A := (-a, 0)$ und $B := (a, 0)$. Unter einer *Lemniskate* versteht man die Menge aller Punkte, bei denen das Produkt der Abstände zu A und B gleich a^2 ist.



Für die Fläche F und den Umfang U der Lemniskate gilt

$$F = a^2, \quad U = \frac{\pi a \sqrt{2}}{M(\sqrt{2}, 1)}.$$