Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dr. Birgit Debrabant
Dominique Küpper
Stefan Löbig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS2009
22.05.2009

6. Tutorium „Analysis 1 für Mathematik, LAG/Mathematik, Physik“

Aufgabe T22 (Folgen in $\mathbb{C}$)

a) Konstruieren Sie eine konvergente Folge (a_n) in $\mathbb{C}$, so dass für jedes Folgeglied $|a_k| = 2$ und $a_k \neq a_m$ für $k \neq m$ gilt.

b) Konstruieren Sie eine gegen 0 konvergente Folge (b_n) in $\mathbb{C}$, so dass für jedes Folgeglied $\arg(b_m) \neq \arg(b_k)$ für $m \neq k$ gilt.

c) Konstruieren Sie eine divergente Folge (c_n) in $\mathbb{C}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $|c_n| = 2\,\mathrm{Im}(c_n)$ gilt.

Hinweis: Wiederholen Sie gegebenenfalls die Begriffe *Realteil, Imaginärteil, Betrag, Argument* und *das Konjugierte einer komplexen Zahl.* (Skript S 30-32).

Aufgabe T23 (Doppelfolgen)

Sei $a_{n,m} := \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ eine sogenannte Doppelfolge.

(a) Berechnen Sie die ersten fünf Glieder der Folgen

$$(a_{n,2})_{n\in\mathbb{N}}, \quad (a_{3,m})_{n\in\mathbb{N}}.$$

(b) Bestimmen Sie

$$a = \lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} a_{n,m}) \quad \text{und} \quad \tilde{a} = \lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} a_{n,m}).$$

Was fällt Ihnen auf?

Hinweis: Berechnen Sie zunächst den Grenzwert $a_n := \lim_{m\to\infty} a_{n,m}$ und dann den Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe T24 (Fibonacci-Folge)

Gegeben sei die Fibonacci-Folge, welche durch folgende Rekursionsformel definiert ist:

$$\begin{aligned} a_1 &:= 1 \\ a_2 &:= 1 \\ a_{n+2} &:= a_{n+1} + a_n \text{ für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

konvergiert und ermitteln Sie den Grenzwert. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Nehmen Sie zunächst an, dass die Folge b_n konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert $b := \lim_{n\to\infty} b_n$.

(b) Betrachten Sie die Teilfolge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aller Folgenelemente mit geradem Index, also $c_n := b_{2n}$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$b \leq c_{n+1} \leq c_n$$

gilt.

(c) Sei $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Teilfolge zu ungeraden Indizes, also $d_n := b_{2n-1}$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$d_n \leq d_{n+1} \leq b$$

gilt.

(d) Beweisen Sie $\lim_{n\to\infty} c_n = b = \lim_{n\to\infty} d_n$.

(e) Schließen Sie $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.