Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dr. Birgit Debrabant
Dominique Küpper
Stefan Löbig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS2009
15.05.2009

5. Tutorium „Analysis 1 für Mathematik, LAG/Mathematik, Physik“

Analog zu $\mathbb{R}^n$ definieren wir den n-dimensionalen euklidischen Raum über $\mathbb{C}$ durch

$$\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{n \text{ mal}}.$$

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definition.

(i) Eine Abbildung

$$(\cdot|\cdot) : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, \quad (x, y) \mapsto (x|y)$$

heißt Skalarprodukt, falls sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(SP1) $(x|y) = \overline{(y|x)}$ für alle $x, y \in \mathbb{K}^n$. (Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so ist dies äquivalent zu $(x|y) = (y|x)$.)

(SP2) $(\lambda x + \mu y|z) = \lambda(x|z) + \mu(y|z)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{K}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

(SP3) $(x|x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$ und $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(ii) Weiterhin definieren wir die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}, \text{ wobei } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ und } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe T18 (Skalarprodukt)

Sei $n = 2$. Zeichnen Sie jeweils die folgenden Vektoren x und y und berechnen Sie $\langle x, y \rangle$.

$$(a)\ x = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad (b)\ x = -\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad (c)\ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

In (c) genügt ein Beispiel für die Zeichnung.

Aufgabe T19 (Skalarprodukt)

Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt ist.

Aufgabe T20 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Beweisen Sie die sogenannte Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:
Ist $(\cdot|\cdot)$ ein Skalarprodukt, so gilt für alle $x, y \in \mathbb{K}^n$

$$|(x|y)|^2 \leq (x|x)(y|y).$$

Hierbei gilt "=" genau dann, wenn es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $x = \lambda y$ gibt oder wenn $y = 0$ ist.
Gehen Sie für den Beweis wie folgt vor:

1. Zeigen Sie $(x|0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$ und folgern Sie die Behauptung für $y = 0$. Danach können Sie für den Rest des Beweises annehmen, dass $y \neq 0$ ist.
2. Berechnen Sie für $\alpha \in \mathbb{K}$ das Skalarprodukt $(x - \alpha y|x - \alpha y)$ und beachten Sie (SP3).
3. Setzen Sie speziell $\alpha = \frac{(x|y)}{(y|y)}$ und folgern Sie die erste Behauptung.
4. Beweisen Sie den Nachsatz erst, wenn Sie mit dem Rest des Blattes schon fertig sind, denn er wird für das weitere nicht gebraucht und ist nur der Vollständigkeit halber aufgeführt.
5. Um den Nachsatz zu zeigen, beweisen Sie zunächst "$\Rightarrow$".
6. Für "$\Leftarrow$" zeigen Sie, dass, falls $x \neq \alpha y$, in der obigen Ungleichung "$<$" steht.

Aufgabe T21 (Norm, Dreiecksungleichung)

(a) Zeigen Sie, dass für jedes Skalarprodukt durch $\|x\| := \sqrt{(x|x)}$ eine Norm definiert wird, das heißt eine Abbildung : $\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die die Eigenschaften der Norm aus Satz 3.2 erfüllt.

(b) Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 3.2 aus der Vorlesung. Es ist also zu zeigen, dass

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

für $x \in \mathbb{R}^n$ die Dreiecksungleichung erfüllt.