Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dr. Birgit Debrabant
Dominique Küpper
Stefan Löbig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS2009
08.05.2009

4. Tutorium „Analysis 1 für Mathematik, LAG/Mathematik, Physik“

Thema dieses Tutoriums ist die Mächtigkeit von Mengen. Einige der folgenden Aufgaben können relativ bequem mit dem Mächtigkeitstheorem von Bernstein (siehe Aufgabe T16) gelöst werden. Machen sie sich daher zunächst mit diesem Theorem bekannt, bevor sie an die Lösung der Aufgaben T14 und T15 gehen. Aufgabe T16 ist dann dem (etwas anspruchsvolleren) Beweis dieses Theorems gewidmet.

Aufgabe T14 (Mächtigkeit von Mengen)
Entscheiden sie, welche der folgenden Mengen gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ oder gleichmächtig zu $\mathbb{R}$ sind.

$$\begin{aligned} A &= (0,1) & \qquad D &= \mathbb{Q} \cap (0,1) \\ B &= \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{Q}; & E &= \mathbb{N} \times \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}; \\ C &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^n = 2 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}; & F &= (0,1) \times (0,1) \end{aligned}$$

Aufgabe T15 (Mächtigkeit von Mengen)
Im folgenden Beispiel wird deutlich, dass das Mächtigkeitstheorem von Bernstein sehr hilfreich ist.

(i) Zeigen sie, dass das abgeschlossene Intervall $[0,1]$ und das halboffene Intervall $[0,1)$ gleichmächtig sind.

(ii) Finden sie eine Bijektion zwischen $[0,1]$ und $[0,1)$.

Aufgabe T16 (Mächtigkeitstheorem von Bernstein:)
Wenn injektive Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to M$ existieren, dann sind M und N gleichmächtig.
Um dies zu beweisen definieren wir zu jeder Teilmenge $A \subset M$

$$F(A) := M \setminus g(N \setminus f(A)))$$

und zeigen:

(i) Ist f injektiv, dann gilt

$$f\left(\bigcap_{i\geq 1} A_i\right) = \bigcap_{i\geq 1} f(A_i).$$

Zeigen sie, dass Aussage (i) im Allgemeinen nicht zutrifft, wenn man die Vorraussetzung f injektiv wegläßt.

(ii) Für jede Folge von Teilmengen $A_1, A_2, \ldots$ gilt

$$F\left(\bigcap_{i\geq 1} A_i\right) = \bigcap_{i\geq 1} F(A_i)$$

Hinweis: Benutzen sie Aufgabe G16 und die De Morgansche Identität aus der 4. "Ubung.

(iii) Für die Menge $A_0 := M \cap F(M) \cap F^2(M) \cap F^3(M) \cap \ldots$ gilt $F(A_0) = A_0$.

(iv) Die Abbildung

$$\Phi : M \to N; x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A_0 \\ g^{-1}(x) & \text{falls } x \notin A_0 \end{cases}$$

ist wohldefiniert und bijektiv.

Wenn sie noch Energie und Lust haben, können sie sich mit der folgenden Aufgabe ein wenig die Zeit vertreiben.

Aufgabe T17 (Untreue Ehemänner)
In einem kleinen Bergdorf in den Abruzzen tritt der Pfarrer vor seine (vollständig versammelte) Gemeinde und spricht: „In diesem Dorf gibt es Männer, die ihre Frauen betrügen. Ich will keinen selber enttarnen, aber ich bitte alle Ehefrauen, die sich sicher sind, dass ihr Mann sie betrügt, denselben im Morgengrauen vor die Tür zu setzen."

Nun ist es im Grunde kein Geheimnis, welcher Mann welche Frau mit wem betrügt, der Klatsch und Tratsch funktioniert wie geschmiert und alle sind gut informiert. Alle bis auf die jeweilige Ehefrau. Das ist Ehrensache.

In den nächsten Tagen geht der Pfarrer am Morgen durch die Straßen und hält Ausschau nach ausgesetzten Männern. Aber erst am 60. Tag sitzen einige Männer draußen.

Wieviele sind es, und warum sind sich die Frauen plötzlich so sicher?