Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dr. Birgit Debrabant
Dominique Küpper
Stefan Löbig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS2009
30.04.2009

3. Tutorium „Analysis 1 für Mathematik, LAG/Mathematik, Physik“

Aufgabe T10 (Vollständige Induktion)

Für $n \in \mathbb{N}$ und eine reelle Zahl x ist $\binom{x}{n}$ wie folgt definiert

$$\binom{x}{0} := 1, \qquad \binom{x}{n+1} := \binom{x}{n} \cdot \frac{x-n}{n+1}.$$

Beweisen Sie für $n \geq 1$

(a) $\binom{x+1}{n} = \binom{x}{n} + \binom{x}{n-1}$

(b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$

Aufgabe T11 (Vollständige Induktion)

Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 1$ gilt

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}.$$

Aufgabe T12 (Induktion und Geometrie)

Es gilt: Eine Gerade zerlegt die Ebene in zwei Gebiete.
Zeigen Sie: n Geraden können die Ebene in höchstens $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ Gebiete zerlegen.

Aufgabe T13 (Mächtigkeit der Potenzmenge)

Beweisen Sie, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer n-elementigen Menge genau 2^n Elemente besitzt.

Aufgabe T14 (Mengen)

Es seien L, M, N Teilmengen der Menge X. Skizzieren Sie die folgenden Mengen und zeigen Sie anschließend die folgenden Aussagen:

(a) $(M \cup N) \cap L = (M \cap L) \cup (N \cap L)$,

(b) $(M \cap N) \cup L = (M \cup L) \cap (N \cup L)$,

(c) $(M \subseteq N) \Leftrightarrow X \backslash N \subseteq X \backslash M$.