



2. Tutorium

„Analysis 1 für Mathematik, LAG/Mathematik, Physik“

Aufgabe T5 (Wurzel)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Es seien, $a, b \geq 0$. Dann gilt $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.
- (b) $\sqrt{6}$ ist irrational.
- (c) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ ist irrational.

Aufgabe T6 (Infimum, Supremum)

- (a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung und geben Sie das Infimum, Supremum, Minimum, Maximum dieser Lösungsmenge an, sofern diese existieren.

$$(x+a)(x+b)(x+c) > 0 \quad a < b < c.$$

Überprüfen Sie, ob für die folgenden Mengen Infimum, Supremum, Minimum oder Maximum existieren und geben Sie diese gegebenenfalls an.

- (b) $M_2 = \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} : x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 1 \right\}$
- (c) $M_3 = \left\{ \frac{|1-xy|}{(1+x^2)(1+y^2)} : x, y \in \mathbb{R}, x \neq y \right\}$.

Aufgabe T7 (Supremum)

Seien A, B nichtleere, beschränkte Teilmengen von \mathbb{R} .

- (a) Überlegen Sie, welche Auswirkung die Beschränktheit der Mengen auf die Existenz von Infimum, Supremum, Minimum und Maximum hat.
- (b) Zeigen Sie:

$$\sup(A \cup B) = \max \{ \sup(A), \sup(B) \}.$$

Aufgabe T8 (n -te Wurzel)

Zeigen Sie:

Zu $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $y > 0$ mit der Eigenschaft

$$y^n = x.$$

Aufgabe T9 (Induktion)

Bildet man die Summe der ersten ungeraden Zahlen, z.B. $1 + 3 = 4$ oder $1 + 3 + 5 = 9$, so ergibt sich eine Quadratzahl. Finde eine allgemeine Formel für die Summe der ersten ungeraden Zahlen und zeige die Gültigkeit der Formel mit Hilfe der vollständigen Induktion.