Fachbereich Mathematik
PD Dr. Raymond Hemmecke
Dr. Sven Herrmann

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2009
17. April 2009

1. Tutoriumsblatt zur Vorlesung „Algorithmische Diskrete Mathematik“

Vollständige Induktion

Aufgabe T1 (Induktion auf Graphen)

Ein Blatt eines Graphen ist ein Knoten mit Grad 1. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass ein Baum mit nichtleerer Kantenmenge mindestens zwei Blätter hat.

Aufgabe T2 (Es gibt Leben auf dem Mars!)

Betrachten Sie den folgenden Beweis mittels vollständiger Induktion für die stärkere Aussage: „Alle Planeten sind bewohnt.“ und nehmen Sie dazu Stellung.
Induktionsanfang ($n = 1$): Bekanntermaßen ist die Erde ein Planet. Sie ist auch bewohnt.
Induktionsannahme: In einer Menge von n Planeten, in denen mindestens einer bewohnt ist, sind alle bewohnt.
Induktionsschritt ($n \to n + 1$): Sei eine Menge von $n + 1$ Planeten gegeben. Wir ordnen diese Planeten nun so an, dass ein bewohnter Planet an erster Stelle steht. Nun entfernen wir den letzten Planeten in unserer Reihe. Die übrigen n Planeten sind nach Induktionsannahme bewohnt. Wir ersetzen nun die Erde durch den vorher entfernten Planeten. Wir erhalten wieder eine Menge von n Planeten, die nach Induktionsannahme alle bewohnt sind. Somit sind alle $n + 1$ Planeten bewohnt.

Aufgabe T3 (Induktion)

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die folgende Aussage gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2} n(n + 1)\,.$$

(b) Beweisen Sie die folgende Formel für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k}\,.$$