Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Sommersemester 2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

13.7.2009

# Numerische Lineare Algebra
# Übung 12

## Präsenzübung

**Ü 35** Im Folgenden sei $A$ reell symmetrisch und positiv definit. Wir haben gezeigt, dass das Lanczos–Verfahren eine Orthogonalbasis $Q_k$ des Krylowunterraumes $\text{span}(r_0, \ldots, A^{k-1}r_0)$ erzeugt, wenn man

$$q_1 \;=\; r_0/||r_0||$$

setzt. Es ist dann $Q_k^T A Q_k \;=\; T_k$ tridiagonal. Wie in der Einleitung zu Abschnitt 2.4 gezeigt ist damit

$$\tilde{x}_k \stackrel{def}{=} x_0 + Q_k T_k^{-1} Q_k^T r_0$$

die Minimalstelle von

$$f(x) \;=\; \tfrac{1}{2} x^T A x - b^T$$

auf diesem Krylowunterraum. Wählen wir also $x_0 \;=\; 0$ und starten das cg–Verfahren mit $p_0 \;=\; -b$, dann liefert nach dieser Überlegung die durch

$$\tilde{x}_k \stackrel{def}{=} -Q_k T_k^{-1} Q_k^T b$$

definierte Folge den gleichen Wert wie der $k-$te cg-Schritt. Zeigen Sie damit, dass die Spalten der Matrix

$$\tilde{P}_k \;=\; Q_k L_k^{-T},$$

wo

$$T_k \;=\; L_k L_k^T$$

die Cholesky-Zerlegung ist, $L_k$ somit eine untere Dreiecksmatrix ist, bis auf Normierung identisch sind mit den vom cg–Verfahren erzeugten Richtungen $p_0, \ldots, p_{k-1}$.
Hinweis: da die Minima von $f$ auf den geschachtelten Unterräumen eindeutig sind, genügt es zu zeigen, dass $\tilde{x}_k - \tilde{x}_{k-1}$ ein Vielfaches der letzten Spalte von $\tilde{P}_k$ ist. Was ergibt nach den obigen Setzungen

$$Q_k^T r_0$$

?

**Ü 36** Bei der Methode GMRES zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit einer invertierbaren, aber sonst beliebigen Matrix $A$ wird die Folge $\{x_k\}$ definiert durch

$$x_k \;=\; x_0 + Q_k y_k \;,\; Q_k \;=\; (q_0, \ldots, q_{k-1}) \;,\; q_0 \;=\; r_0/||r_0||$$

wo $Q_k$ eine Orthogonalbasis von $\text{span}(r_0, \ldots, A^{k-1}r_0)$ ist und $y_k$ die Lösung der linearen Ausgleichsaufgabe

$$||AQ_k y + r_0|| \stackrel{!}{=} \min_y$$

bezeichnet. Zeigen Sie, dass

$$U_k^H A Q_k = \begin{pmatrix} H_k \\ O \end{pmatrix}$$

gilt, wo $H_k$ eine $(k+1) \times k$ obere Hessenbergmatrix ist und $U_k$ durch Ergänzung von $Q_{k+1}$ zu einer unitären Matrix entsteht.
Hinweis : Betrachten Sie die Gram-Schmidt QR-Zerlegung

$$(r_0, \ldots, A^{k-1}r_0) = Q_k R_k \ , \ Q_k \ : \ n \times k, \ R_k \ : \ k \times k$$

für zwei aufeinanderfolgende Werte von $k$ und dazu

$$(r_0, \ldots, A^k r_0) = Q_{k+1} R_{k+1} = (r_0, A(r_0, \ldots, A^{k-1} r_0)) \ .$$

Es besteht der Zusammenhang

$$R_{k+1} = \begin{pmatrix} R_k & v_k \\ 0^T & \varrho_{k,k} \end{pmatrix}$$

mit einem $k$-dimensionalen Vektor $v_k$.

**Ü 37** Ein lineares Gleichungssystem $Ax - b = 0$ kann man interpretieren als Berechnung des Durchschnittes der $n$ Hyperebenen

$$\mathcal{H}_i \ : \ \tilde{a}_i^T x - \beta_i = 0$$

wo $\tilde{a}_i^T$ die $i$-te Zeile von $A$ bezeichnet und $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)^T$. Das zyklische Kaczmarz–Verfahren ist definiert durch die Vorschrift:

$$x_k \stackrel{def}{=} \text{orthogonale Projektion von } x_{k-1} \text{ auf } \mathcal{H}_j \ , \ j = mod(k,n) + 1 \ .$$

Lösen Sie mit dieser Vorschrift das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}\xi_1 + \xi_2 &= 1 \\ -2\xi_1 + \xi_2 &= -1 \end{aligned}$$

graphisch und vergleichen Sie das Resulat mit dem Gauss-Seidel-Verfahren. Welches Verfahren konvergiert schneller? Bei welchem Verfahren hängt die Konvergenz von der Numerierung der Gleichungen ab?

# Numerische Lineare Algebra
# Übung 12, Lösungsvorschlag

## Präsenzübung

**Ü 35** Im Folgenden sei $A$ reell symmetrisch und positiv definit. Wir haben gezeigt, dass das Lanczos–Verfahren eine Orthogonalbasis $Q_k$ des Krylowunterraumes $\mathrm{span}(r_0, \ldots, A^{k-1}r_0)$ erzeugt, wenn man

$$q_1 = r_0/||r_0||$$

setzt. Es ist dann $Q_k^T A Q_k = T_k$ tridiagonal. Wie in der Einleitung zu Abschnitt 2.4 gezeigt ist damit

$$\tilde{x}_k \stackrel{def}{=} x_0 + Q_k T_k^{-1} Q_k^T r_0$$

die Minimalstelle von

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T$$

auf diesem Krylowunterraum. Wählen wir also $x_0 = 0$ und starten das cg–Verfahren mit $p_0 = -b$, dann liefert nach dieser Überlegung die durch

$$\tilde{x}_k \stackrel{def}{=} -Q_k T_k^{-1} Q_k^T b$$

definierte Folge den gleichen Wert wie der $k-$te cg-Schritt. Zeigen Sie damit, dass die Spalten der Matrix

$$\tilde{P}_k = Q_k L_k^{-T},$$

wo

$$T_k = L_k L_k^T$$

die Cholesky-Zerlegung ist, $L_k$ somit eine untere Dreiecksmatrix ist, bis auf Normierung identisch sind mit den vom cg–Verfahren erzeugten Richtungen $p_0, \ldots, p_{k-1}$.
Hinweis: da die Minima von $f$ auf den geschachtelten Unterräumen eindeutig sind, genügt es zu zeigen, dass $\tilde{x}_k - \tilde{x}_{k-1}$ ein Vielfaches der letzten Spalte von $\tilde{P}_k$ ist. Was ergibt nach den obigen Setzungen

$$Q_k^T r_0$$

?

*Da*

$$r_0 = -b \quad \textit{und} \quad q_1 = r_0/||r_0||$$

*ist*

$$Q_k^T r_0 = -||b|| e_1 \in \mathbb{R}^k \quad \textit{mit dem ersten Koordinateneinheitsvektor } e_1.$$

*Somit ist*

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k &= -||b|| Q_k T_k^{-1} e_1 \\ &= -||b|| Q_k L_k^{-T} L_k^{-1} e_1 \\ &= -||b|| \tilde{P}_k L_k^{-1} e_1 \end{aligned}$$

*Für die Inverse einer unteren Dreiecksmatrix gilt eine Rekursion:*

$$L_k^{-1} = \begin{pmatrix} L_{k-1} & 0 \\ l_{k-1}^T & l_{k,k} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} L_{k-1}^{-1} & 0 \\ -l_{k-1}^T (L_{k-1})^{-1}/l_{k,k} & 1/l_{k,k} \end{pmatrix}.$$

*Dies bedeutet, dass bei der Erhöhung von $k$ in der ersten Spalte von $L_k^{-1}$ gegenüber der ersten Spalte von $L_{k-1}^{-1}$ lediglich ein neues Element hinzukommt, die übrigen aber ungeändert bleiben. Das aber heisst gerade, dass die Differenz $\tilde{x}_k - \tilde{x}_{k-1}$ nur ein Vielfaches der letzten Spalte von $\tilde{P}_k$ ist, und da dies für alle $k$ gilt, folgt die Behauptung.*

**Ü 36** Bei der Methode GMRES zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit einer invertierbaren, aber sonst beliebigen Matrix $A$ wird die Folge $\{x_k\}$ definiert durch

$$x_k = x_0 + Q_k y_k \ , \ Q_k = (q_0, \dots, q_{k-1}) \ , \ q_0 = r_0/||r_0||$$

wo $Q_k$ eine Orthogonalbasis von $\text{span}(r_0, \dots, A^{k-1} r_0)$ ist und $y_k$ die Lösung der linearen Ausgleichsaufgabe

$$||AQ_k y + r_0|| \stackrel{!}{=} \min_y$$

bezeichnet. Zeigen Sie, dass

$$U_k^H A Q_k = \begin{pmatrix} H_k \\ O \end{pmatrix}$$

gilt, wo $H_k$ eine $(k+1) \times k$ obere Hessenbergmatrix ist und $U_k$ durch Ergänzung von $Q_{k+1}$ zu einer unitären Matrix entsteht.
Hinweis : Betrachten Sie die Gram-Schmidt QR-Zerlegung

$$(r_0, \dots, A^{k-1} r_0) = Q_k R_k \ , \ Q_k \ : \ n \times k, \ R_k \ : \ k \times k$$

für zwei aufeinanderfolgende Werte von $k$ und dazu

$$(r_0, \dots, A^k r_0) = Q_{k+1} R_{k+1} = (r_0, A(r_0, \dots, A^{k-1} r_0)) \ .$$

Es besteht der Zusammenhang

$$R_{k+1} = \begin{pmatrix} R_k & v_k \\ 0^T & \varrho_{k,k} \end{pmatrix}$$

mit einem $k$-dimensionalen Vektor $v_k$.

*Wegen $r_0 = q_0 ||r_0||$ ist offenbar*

$$\begin{aligned} (r_0, \dots, A^k r_0) &= Q_{k+1} R_{k+1} \\ &= (q_0 ||r_0||, A Q_k R_k) \\ &= (q_0, q_1, \dots, q_k) R_{k+1} \\ &= (q_0, q_1, \dots, q_k) \begin{pmatrix} R_k & v_k \\ 0^T & \varrho_{k,k} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

*Wir extrahieren aus diesem Ausdruck die letzten $k$ Spalten: Wegen*

$$\begin{pmatrix} R_k & v_k \\ 0^T & \varrho_{k,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} o^T \\ I_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{H}_k & v_k \\ 0^T & \varrho_{k,k} \end{pmatrix} \ (k+1) \times k$$

*worin $\hat{H}_k$ durch Streichung der ersten Spalte aus $R_k$ entsteht, also Hessenbergstruktur aufweist, folgt*

$$\begin{aligned} U_k^H A Q_k &= \begin{pmatrix} Q_{k+1}^H Q_{k+1} \\ \tilde{Q}_{n-k-1}^H Q_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{H}_k & v_k \\ 0^T & \varrho_{k,k} \end{pmatrix} R_k^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \hat{H}_k & v_k \\ 0^T & \varrho_{k,k} \\ O & O \end{pmatrix} R_k^{-1} \ n \times k \\ &= \begin{pmatrix} H_k \\ O \end{pmatrix} \ n \times k \text{ Hessenberg} \end{aligned}$$

*was zu zeigen war. Dies liefert einen Ansatz zur rekursiven Berechnung von $q_k$ aus $Aq_{k-1}$ und den zuvor berechneten $q_0, \ldots, q_{k-1}$*

**Ü 37** Ein lineares Gleichungssystem $Ax - b = 0$ kann man interpretieren als Berechnung des Durchschnittes der $n$ Hyperebenen

$$\mathcal{H}_i \ : \ \tilde{a}_i^T x - \beta_i = 0$$

wo $\tilde{a}_i^T$ die $i$-te Zeile von $A$ bezeichnet und $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)^T$. Das zyklische Kaczmarz–Verfahren ist definiert durch die Vorschrift:

$$x_k \stackrel{def}{=} \text{orthogonale Projektion von } x_{k-1} \text{ auf } \mathcal{H}_j \ , \ j = mod(k,n) + 1 \ .$$

Lösen Sie mit dieser Vorschrift das lineare Gleichungssystem

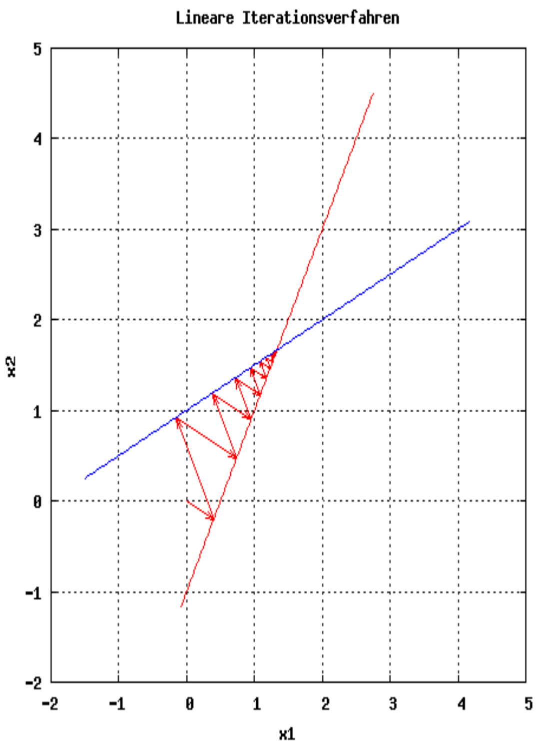
$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}\xi_1 + \xi_2 &= 1 \\ -2\xi_1 + \xi_2 &= -1 \end{aligned}$$

graphisch und vergleichen Sie das Resulat mit dem Gauss-Seidel-Verfahren. Welches Verfahren konvergiert schneller? Bei welchem Verfahren hängt die Konvergenz von der Numerierung der Gleichungen ab?

*Offenbar konvergiert Gauss–Seidel wesentlich schneller. Aber bei Abänderung der Numerierung der Gleichungen divergiert Gauss-Seidel, während dies das Kaczmarz–Verfahren unbeeinflusst lässt.*

```
  lineares gleichungssystem
-0.20000E+01 x(1) +   0.10000E+01 x(2) =  -0.10000E+01
-0.50000E+00 x(1) +   0.10000E+01 x(2) =   0.10000E+01
zyklisches kaczmarz-verfahren
    k     x(1)           x(2)           ||r||
    0  0.000000        0.000000        1.414214
    1  0.4000000      -0.2000000       1.400000
    2 -0.1600000       0.9200000       2.240000
    3  0.7360000       0.4720000       0.8960000
    4  0.3776000       1.188800        1.433600
    5  0.9510400       0.9020800       0.5734400
    6  0.7216640       1.360832        0.9175040
    7  1.088666        1.177331        0.3670016
    8  0.941865        1.470932        0.5872026
    9  1.176746        1.353492        0.2348810
   10  1.082794        1.541397        0.3758096
   11  1.233117        1.466235        0.1503239
   12  1.172988        1.586494        0.2405182
   13  1.269195        1.538390        0.9620727E-01
   14  1.230712        1.615356        0.1539316
   15  1.292285        1.584570        0.6157265E-01
   16  1.267656        1.633828        0.9851624E-01
   17  1.307062        1.614125        0.3940650E-01
   18  1.291300        1.645650        0.6305039E-01
   19  1.316520        1.633040        0.2522016E-01
   20  1.306432        1.653216        0.4035225E-01
   21  1.322573        1.645145        0.1614090E-01
   22  1.316116        1.658058        0.2582544E-01
   23  1.326447        1.652893        0.1033018E-01
   24  1.322314        1.661157        0.1652828E-01
   25  1.328926        1.657852        0.6611313E-02
   26  1.326281        1.663141        0.1057810E-01
   27  1.330513        1.661025        0.4231240E-02
   28  1.328820        1.664410        0.6769985E-02
   29  1.331528        1.663056        0.2707994E-02
   30  1.330445        1.665222        0.4332790E-02
   31  1.332178        1.664356        0.1733116E-02
   32  1.331485        1.665742        0.2772986E-02
   33  1.332594        1.665188        0.1109194E-02
   34  1.332150        1.666075        0.1774711E-02
   35  1.332860        1.665720        0.7098843E-03
   36  1.332576        1.666288        0.1135815E-02
   37  1.333030        1.666061        0.4543260E-03
```

| | | | |
|---|---|---|---|
| 38 | 1.332849 | 1.666424 | 0.7269216E-03 |
| 39 | 1.333139 | 1.666279 | 0.2907686E-03 |
| 40 | 1.333023 | 1.666512 | 0.4652298E-03 |
| 41 | 1.333209 | 1.666419 | 0.1860919E-03 |
| 42 | 1.333135 | 1.666567 | 0.2977471E-03 |
| 43 | 1.333254 | 1.666508 | 0.1190988E-03 |
| 44 | 1.333206 | 1.666603 | 0.1905581E-03 |
| 45 | 1.333283 | 1.666565 | 0.7622325E-04 |



```
   lineares gleichungssystem
 -0.20000E+01 x(1) +   0.10000E+01 x(2) =  -0.10000E+01
 -0.50000E+00 x(1) +   0.10000E+01 x(2) =   0.10000E+01
sorverfahren mit omega=  0.10000E+01
```

| k | x(1) | x(2) | \|\|r\|\| |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.000000 | 0.000000 | 1.414214 |
| 1 | 0.5000000 | 0.000000 | 1.250000 |
| 2 | 0.5000000 | 1.250000 | 1.250000 |
| 3 | 1.125000 | 1.250000 | 0.3125000 |
| 4 | 1.125000 | 1.562500 | 0.3125000 |
| 5 | 1.281250 | 1.562500 | 0.7812500E-01 |
| 6 | 1.281250 | 1.640625 | 0.7812500E-01 |
| 7 | 1.320313 | 1.640625 | 0.1953125E-01 |
| 8 | 1.320313 | 1.660156 | 0.1953125E-01 |
| 9 | 1.330078 | 1.660156 | 0.4882812E-02 |
| 10 | 1.330078 | 1.665039 | 0.4882812E-02 |
| 11 | 1.332520 | 1.665039 | 0.1220703E-02 |
| 12 | 1.332520 | 1.666260 | 0.1220703E-02 |
| 13 | 1.333130 | 1.666260 | 0.3051758E-03 |
| 14 | 1.333130 | 1.666565 | 0.3051758E-03 |
| 15 | 1.333282 | 1.666565 | 0.7629395E-04 |