Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Sommersemester 2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

13.7.2009

Numerische Lineare Algebra
Übung 12

Präsenzübung

Ü 35 Im Folgenden sei A reell symmetrisch und positiv definit. Wir haben gezeigt, dass das Lanczos–Verfahren eine Orthogonalbasis Q_k des Krylowunterraumes span$(r_0, \ldots, A^{k-1}r_0)$ erzeugt, wenn man

$$q_1 = r_0/||r_0||$$

setzt. Es ist dann $Q_k^T A Q_k = T_k$ tridiagonal. Wie in der Einleitung zu Abschnitt 2.4 gezeigt ist damit

$$\tilde{x}_k \stackrel{def}{=} x_0 + Q_k T_k^{-1} Q_k^T r_0$$

die Minimalstelle von

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T$$

auf diesem Krylowunterraum. Wählen wir also $x_0 = 0$ und starten das cg–Verfahren mit $p_0 = -b$, dann liefert nach dieser Überlegung die durch

$$\tilde{x}_k \stackrel{def}{=} -Q_k T_k^{-1} Q_k^T b$$

definierte Folge den gleichen Wert wie der $k-$te cg-Schritt. Zeigen Sie damit, dass die Spalten der Matrix

$$\tilde{P}_k = Q_k L_k^{-T},$$

wo

$$T_k = L_k L_k^T$$

die Cholesky-Zerlegung ist, L_k somit eine untere Dreiecksmatrix ist, bis auf Normierung identisch sind mit den vom cg–Verfahren erzeugten Richtungen $p_0, \ldots, p_{k-1}$.
Hinweis: da die Minima von f auf den geschachtelten Unterräumen eindeutig sind, genügt es zu zeigen, dass $\tilde{x}_k - \tilde{x}_{k-1}$ ein Vielfaches der letzten Spalte von $\tilde{P}_k$ ist. Was ergibt nach den obigen Setzungen

$$Q_k^T r_0$$

?

Ü 36 Bei der Methode GMRES zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit einer invertierbaren, aber sonst beliebigen Matrix A wird die Folge $\{x_k\}$ definiert durch

$$x_k = x_0 + Q_k y_k \ , \ Q_k = (q_0, \ldots, q_{k-1}) \ , \ q_0 = r_0/||r_0||$$

wo Q_k eine Orthogonalbasis von $\text{span}(r_0, \ldots, A^{k-1}r_0)$ ist und y_k die Lösung der linearen Ausgleichsaufgabe

$$||AQ_k y + r_0|| \overset{!}{=} \min_y$$

bezeichnet. Zeigen Sie, dass

$$U_k^H A Q_k \;=\; \begin{pmatrix} H_k \\ O \end{pmatrix}$$

gilt, wo H_k eine $(k+1) \times k$ obere Hessenbergmatrix ist und U_k durch Ergänzung von Q_{k+1} zu einer unitären Matrix entsteht.
Hinweis : Betrachten Sie die Gram-Schmidt QR-Zerlegung

$$(r_0, \ldots, A^{k-1}r_0) \;=\; Q_k R_k \;,\; Q_k \;:\; n \times k,\; R_k \;:\; k \times k$$

für zwei aufeinanderfolgende Werte von k und dazu

$$(r_0, \ldots, A^k r_0) \;=\; Q_{k+1} R_{k+1} \;=\; (r_0, A(r_0, \ldots, A^{k-1}r_0)) \;.$$

Es besteht der Zusammenhang

$$R_{k+1} \;=\; \begin{pmatrix} R_k & v_k \\ 0^T & \varrho_{k,k} \end{pmatrix}$$

mit einem k-dimensionalen Vektor v_k.

Ü 37 Ein lineares Gleichungssystem $Ax - b \;=\; 0$ kann man interpretieren als Berechnung des Durchschnittes der n Hyperebenen

$$\mathcal{H}_i \;:\; \tilde{a}_i^T x - \beta_i \;=\; 0$$

wo $\tilde{a}_i^T$ die i-te Zeile von A bezeichnet und $b \;=\; (\beta_1, \ldots, \beta_n)^T$. Das zyklische Kaczmarz–Verfahren ist definiert durch die Vorschrift:

$$x_k \overset{def}{=} \text{ orthogonale Projektion von } x_{k-1} \text{ auf } \mathcal{H}_j \;,\; j = mod(k,n) + 1 \;.$$

Lösen Sie mit dieser Vorschrift das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}\xi_1 + \xi_2 &= 1 \\ -2\xi_1 + \xi_2 &= -1 \end{aligned}$$

graphisch und vergleichen Sie das Resulat mit dem Gauss-Seidel-Verfahren. Welches Verfahren konvergiert schneller? Bei welchem Verfahren hängt die Konvergenz von der Numerierung der Gleichungen ab?