Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Sommersemester 2009

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

6.7.2009

Numerische Lineare Algebra
Übung 11

Präsenzübung

Ü 32 Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

mit dem cg-Verfahren von Hestenes und Stiefel und dem Startvektor $x_0 = 0$. Rechnen Sie exakt mit Brüchen.

Ü 33 Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch und positiv definit mit $k < n$ verschiedenen (reellen) Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_k$. Man zeige, daß in diesem Fall das cg–Verfahren schon nach k Iterationen die Lösung von $Ax^* = b$ liefert, d.h. $x_k = x^*$.
Hinweis: Nach Satz 2.4.3 gilt mit

$$E(x) \;=\; \tfrac{1}{2}(x - x^*)^T A(x - x^*) \;=\; f(x) + \tfrac{1}{2}(x^*)^T Ax^*$$

dass

$$E(x_k) \;\leq\; E(x_0) \min_{p_k} \max_i |p_k(\lambda_i)| \quad \text{wo } p_k \;\in\; \Pi_k \;:\; p_k(0) \;=\; 1\;.$$

Ü 34 Über das cg-Verfahren von Stiefel und Hestenes wurde in der Vorlesung Folgendes bewiesen: Es sei mit

$$r \;=\; Ax - b$$

$$\begin{aligned} p_0 &= r_0 \\ x_{i+1} &= x_i - \sigma_i p_i\;,\; r_{i+1}^T p_i \;=\; 0 \text{ definiert } \sigma_i \\ r_{i+1} &= r_i - \sigma_i A p_i \\ p_{i+1} &= r_{i+1} + \frac{\| r_{i+1} \|^2}{\| r_i \|^2} p_i \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} p_i^T A p_j &= 0 \quad \text{für} \quad i \neq j \\ r_k^T &\perp \operatorname{span}(p_0, \ldots, p_{k-1}) \end{aligned}$$

mit $i,\; j \;\leq\; N \;\leq\; n$.
Zeigen Sie

$$r_j^T r_i \;=\; 0 \text{ für } i \;\neq\; j\;,\; i,j \;\leq\; N\;.$$

Hausübung

H 32 Seien $a >> 1$, $b = (0,0)^T$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Gesucht werde das Minimum von

$$f(x) \;=\; \tfrac{1}{2}x^T A x - b^T x \; .$$

Dazu werde das Gradientenverfahren mit dem Startvektor $x_0 = (a,1)^T$ angewendet, d.h.

$$x_{k+1} \;=\; x_k - \sigma_k \nabla f(x_k), \quad \sigma_k \;=\; \frac{\nabla f(x_k)^T \nabla f(x_k)}{\nabla f(x_k)^T A \nabla f(x_k)} \; .$$

- Zeigen Sie, daß die Abstiegsrichtungen r_k und r_{k+1} aufeinanderfolgender Iterationsschritte aufeinander senkrecht stehen. Was folgt daraus für zweidimensionale Probleme?
- Zeigen Sie, daß in diesem Beispiel für die durch das Gradientenverfahren gelieferte Folge mit den Gliedern $x_k = (\xi_k, \eta_k)^T$

  $$\xi_{k+1} = \rho \xi_k, \quad \eta_{k+1} = -\rho \eta_k, \; k = 0, 1, \ldots$$

  mit $\rho = \frac{a-1}{a+1}$ gilt. Was bedeutet dieses Ergebnis für die Konvergenzrate?
- Zeigen Sie, daß in diesem Beispiel r_k und r_{k+1} bezüglich der durch A induzierten Metrik fast parallel sind.

H 33 Man bestimme die Minima von

a)

$$f(x) \;=\; \tfrac{1}{100}(10^4\xi_1^2 + 3000\xi_1\xi_2 + 9750\xi_2^2 + \xi_1\xi_3 + \xi_3^2 + 300\xi_1 - 400\xi_2 + \xi_3)$$

b)

$$f(x) \;=\; \xi_1^2 + 0.3\xi_1\xi_2 + 0.975\xi_2^2 + 0.01\xi_1\xi_3 + \xi_3^2 + 3\xi_1 - 4\xi_2 + \xi_3$$

mit dem cg-Verfahren von Hestenes und Stiefel. Man trage $-\lg\left(||x_k - x^*||/||x^*||\right)$ als Funktion von k auf. Starten Sie mit $x_0 = 0$. Im Fall a) ist:

$$x^* = (-0.018478819, 0.023355715, -0.49076058)^T$$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen beiden Aufgaben?

H 34 PCG: Wegen Satz 2.4.3 ist die Konvergenz des CG-Verfahrens für $Ax = b$ langsam, wenn die Eigenwerte von A weit auseinander liegen. Deshalb versucht man durch eine Kongruenztransformation, die Verteilung der Eigenwerte zu verbessern. Dieses Vorgehen wird Präkonditionieren genannt und führt zu einem modifizierten Algorithmus, dem Verfahren PCG.

Sei $M = LL^T$ mit der regulären Matrix L.
1.) Zeigen Sie, daß M symmetrisch und positiv definit ist.

Statt der Aufgabe $Ax = b$ wird die äquivalente Form $L^{-1}AL^{-T}L^Tx = L^{-1}b$ herangezogen. Zur Abkürzung wird

$$\hat{A} = L^{-1}AL^{-T}\,,\ \hat{x} = L^Tx \quad \text{und} \quad \hat{b} = L^{-1}b \qquad (*)$$

gesetzt.
2.) Zeigen Sie, daß $\hat{A}$ symmetrisch, positiv definit und ähnlich zu $M^{-1}A$ ist.
Bem.: Dies gibt Hinweise, wie die Matrix M und damit L, L^T zu wählen sind.
3.) Wie lautet der CG-Algorithmus für die Aufgabe $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$?

Aus Aufwandsgründen möchte man zwar das transformierte Gleichungssystem lösen, aber gleichzeitig vermeiden, die Matrix $\hat{A}$ explizit bestimmen zu müssen.

Im Folgenden sollen mit $\hat{r}_k, \hat{p}, ...$ etc. die Zwischenwerte des CG-Verfahrens angewandt auf $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$ bezeichnen. Für den modifizierten Algorithmus definiere wegen (*) als Zwischenwerte $s_k = L\hat{r}_k$, $y_k = L^{-T}\hat{x}_k$ und $q_k = L\hat{p}_k$. Diese Schreibweise soll andeuten, daß s_k, y_k und q_k nur indirekt mit den entsprechenden Zwischenergebnissen des ursprünglichen CG-Verfahrens angewandt auf $Ax = b$ zu tun haben.
4.) Zeigen Sie

$$\begin{aligned} y_k &= y_{k-1} + \hat{\alpha}_k M^{-1} q_{k-1} \\ s_k &= s_{k-1} - \hat{\alpha}_k A M^{-1} q_{k-1} \\ M^{-1} q_k &= M^{-1} s_k + \hat{\beta}_k M^{-1} q_{k-1}\,. \end{aligned}$$

Zur besseren Übersichtlichkeit werden die Hilfsvektoren $g_k = M^{-1}q_k$ und $z = M^{-1}s_k$ eingeführt.
5.) Zeigen Sie $\hat{r}_k^T\hat{r}_k = s_k^T z$ und $\hat{p}_k^T\hat{A}\hat{p}_k = g_k^T A g_k$.
6.) Zeigen Sie, daß der im Skript angegebene Algorithmus für das präkonditionierte CG–Verfahren die gewünschten Anforderungen erfüllt. Bem.: Da Gleichungssysteme der Form $Mz = s$ gelöst werden müssen, liefert dies weitere Richtlinien für eine Wahl von M bzw. L, L^T.