Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Sommersemester 2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

29.6.2009

Numerische Lineare Algebra
Übung 10

Präsenzübung

Ü 28 Untersuchen Sie die folgenden Matrizen bezüglich der Kriterien irreduzibel, irreduzibel diagonaldominant, strikt diagonaldominant, L-Matrix, M-Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ü 29 Zeigen Sie, daß die Tridiagonalmatrix

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \gamma_1 & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \beta_{n-1} \\ & & & \gamma_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix} =: (t_{ij})$$

irreduzibel ist, falls

$$\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_{n-1} \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \ldots \cdot \gamma_{n-1} \neq 0$$

Ü 30 Sei A eine M-Matrix mit Diagonale D und Nebendiagonale $-B = A - D$. Sei weiter D' eine nichtnegative Diagonalmatrix und B' eine nichtnegative Matrix mit Diagonale 0 und $B' \leq B$ (komponentenweise). Zeigen Sie:

$$A' = D + D' - (B - B')$$

ist eine M-Matrix und $(A')^{-1} \leq A^{-1}$ (komponentenweise zu verstehen).
Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis folgenden Satz:
Satz: A ist eine M–Matrix genau dann, wenn A eine L–Matrix ist und das Gesamtschrittverfahren für A konvergiert, d.h.

$$\varrho(-D^{-1}(A - D)) < 1 . \quad \square$$

Bezeichnet man mit J bzw. J' die Gesamtschrittmatrix zu A bzw. A', dann gilt:

$$0 \leq J' \leq J \qquad \text{(Beweis!)}$$

Folgern Sie daraus $\rho(J') < 1$.

Ü 31 Es sei A reell symmetrisch und positiv definit und

$$A \;=\; D - L - U$$

die hier übliche Zerlegung. Zeigen Sie, dass die Matrix J des Jacobiverfahrens nur reelle Eigenwerte hat.
Hinweis: J ist in der Regel unsymmetrisch. Vielleicht kann man J durch eine Ähnlichkeitstransformation symmetrisieren?

Hausübung

H 29 Zeigen Sie : Jede symmetrische M-Matrix ist positiv definit.
Hinweis: Ü30

H 30 Die $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & & & & & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte

$$\lambda_i = 2(1 - \cos(\tfrac{i\pi}{n+1})) , \quad i = 1, \dots, n .$$

Berechnen Sie die Spektralradien ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 der Matrizen J, H und $B(\omega_{\text{opt}})$, wobei J und H die Matrix des Jacobi–Verfahrens bzw. des Gauss–Seidel–Verfahrens sind und ω_{opt} nach Satz 2.2.13 bestimmt ist. Berücksichtigen Sie Ü31 und die Sätze 2.2.11 und 2.2.12 mit Folgerung. Entwickeln Sie die Konvergenzradien nach Potenzen von $(1/n)$ und werten Sie auch ϱ_i^{1000} für $i = 1, 2, 3$ explizit aus.

H 31 In der Mechanik treten häufig Gleichungssysteme auf, in denen die Matrix A einen Zusammenhang zwischen Belastung, der rechten Seite b, und der Verformung, der gesuchten Lösung x, beschreibt. Man wird natürlich annehmen, dass bei grösserer Belastung auch die Verformung zunehmen wird. Wann dies im Sinne der natürlichen Halbordnung des $\mathbb{R}^n$ gilt, beschreibt das Folgende.

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt inversmonoton, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$Ax \le Ay \quad \Rightarrow \quad x \le y$$

(dies ist komponentenweise zu verstehen)
Zeigen Sie:

$$A \text{ M-Matrix} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ L-Matrix und inversmonoton}$$

(Hinweis zu "$\Leftarrow$": Zeigen Sie zuerst die Regularität von A mittels Widerspruchsbeweis und beweisen Sie dann $A^{-1}e_i \ge 0$)

Numerische Lineare Algebra
Übung 10, Lösungsvorschlag

Präsenzübung

Ü 28 Untersuchen Sie die folgenden Matrizen bezüglich der Kriterien irreduzibel, irreduzibel diagonaldominant, strikt diagonaldominant, L-Matrix, M-Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrix A *Der gerichtete Graph hat die Gestalt:*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[lll, bend left] \end{tikzcd}$$

Offenbar kann man von jedem Knoten zu jedem anderen Knoten gelangen, sodaß A irreduzibel ist. Alle anderen Eigenschaften treffen nicht zu.

Matrix B *Analog dem Vorgehen bei der Matrix A erhalten wir die Irreduzibilität von B. Da schwache Diagonaldominanz und in (mindestens) einer Zeile strikte Diagonaldominanz vorliegt, folgt mit der Vorzeichenstruktur, daß B eine irreduzibel diagonaldominante L-Matrix ist. Das ist eine hinreichende Bedingung für eine M-Matrix.*

Matrix C *ist eine irreduzible L-Matrix, aber <u>keine</u> irreduzibel diagonaldominante Matrix. Weil C singulär ist, kann keine M-Matrix vorliegen.*

Ü 29 Zeigen Sie, daß die Tridiagonalmatrix

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \gamma_1 & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \beta_{n-1} \\ & & & \gamma_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix} =: (t_{ij})$$

irreduzibel ist, falls

$$\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_{n-1} \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \ldots \cdot \gamma_{n-1} \neq 0$$

Zu zeigen ist: für jedes Knotenpaar (P_i, P_j), $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, besteht ein gerichteter Weg von P_i nach P_j.

1) Für $j = i+1$ bzw. $j = i-1$ ist wegen $t_{ij} = \beta_i \neq 0$ bzw. $t_{ij} = \gamma_{i-1} \neq 0$ jeweils eine gerichtete Kante von P_i nach P_j vorhanden.

2) Sei jetzt $j = i+k$, $1 < k \leq n-i$. Dann gibt es eine gerichtete Kante von P_i nach P_{i+1}, von P_{i+1} nach P_{i+2} usw., d.h. die Zusammensetzung dieser k gerichteten Kanten liefert einen gerichteten Weg von P_i nach P_j.

3) $j = i - k$: analog zu 2).

Ü 30 Sei A eine M-Matrix mit Diagonale D und Nebendiagonale $-B = A - D$. Sei weiter D' eine nichtnegative Diagonalmatrix und B' eine nichtnegative Matrix mit Diagonale 0 und $B' \leq B$ (komponentenweise). Zeigen Sie:

$$A' \;=\; D + D' - (B - B')$$

ist eine M-Matrix und $(A')^{-1} \;\leq\; A^{-1}$ (komponentenweise zu verstehen).
Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis folgenden Satz:
Satz: A ist eine M–Matrix genau dann, wenn A eine L–Matrix ist und das Gesamtschrittverfahren für A konvergiert, d.h.

$$\varrho(-D^{-1}(A - D)) \;<\; 1\,. \quad \square$$

Bezeichnet man mit J bzw. J' die Gesamtschrittmatrix zu A bzw. A', dann gilt:

$$0 \;\leq\; J' \;\leq\; J \qquad \text{(Beweis!)}$$

Folgern Sie daraus $\rho(J') < 1$.

Offensichtlich ist

$$J \;=\; D^{-1} \cdot B, \quad J' \;=\; (D + D)^{-1} \cdot (B - B')$$

Wegen $(D + D')^{-1} \;=\; diag(\frac{1}{d_i + d_i'}) \;\leq\; diag(\frac{1}{d_i}) \;=\; D^{-1}$ *und* $0 \;\leq B - B' \;\leq\; B$ *folgt sofort* $0 \;\leq J' \;\leq J$; *mit* $\rho(J) \;< 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} J^n \;=\; 0$ *und* $0 \;\leq\; (J')^n \;\leq\; (J)^n$ *gilt auch* $\lim_{n\to\infty}(J')^n \;=\; 0$, *d.h.* $\rho(J') \;< 1$. *Mit obigem Satz ist daher* A' *M-Matrix. Also ist auch* $(A')^{-1} \;\geq\; 0$; *mit* $A' \;\geq\; A$ *folgt durch Multiplikation dieser Ungleichung mit* $(A')^{-1}$ *und* A^{-1} *der zweite Teil.*

Ü 31 Es sei A reell symmetrisch und positiv definit und

$$A \;=\; D - L - U$$

die hier übliche Zerlegung. Zeigen Sie, dass die Matrix J des Jacobiverfahrens nur reelle Eigenwerte hat.
Hinweis: J ist in der Regel unsymmetrisch. Vielleicht kann man J durch eine Ähnlichkeitstransformation symmetrisieren?

Die Matrix D *hat nur positive Einträge und kann daher geschrieben werden als*

$$D \;=\; \Delta^2$$

mit einer reellen Diagonalmatrix Δ. *Es ist wegen* $U \;=\; L^T$

$$\Delta J \Delta^{-1} \;=\; \Delta D^{-1}(L + U)\Delta^{-1} \;=\; \Delta^{-1}(L + L^T)\Delta^{-1}$$

reell symmetrisch, hat also nur reelle Eigenwerte und damit auch J.

Hausübung

H 29 Zeigen Sie : Jede symmetrische M-Matrix ist positiv definit.
Hinweis: Ü30

A positiv definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind größer Null.
A symmetrisch $\Rightarrow$ alle Eigenwerte sind reell.
Sei jetzt A eine symmetrische M-Matrix. 0 scheidet als Eigenwert aus, da A invertierbar ist. Annahme:
Es gibt ein $\lambda < 0$ mit $Ax = \lambda x \quad \Rightarrow \quad 0 = (A - \lambda I)x$, d.h. $A - \lambda I = A + |\lambda| I$ ist singulär. Es ist jedoch $A + |\lambda| I$ ebenfalls M-Matrix und damit invertierbar. (Setze $D' = |\lambda| I$ in Ü30.) Widerspruch!

H 30 Die $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & & & & & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte

$$\lambda_i = 2(1 - \cos(\tfrac{i\pi}{n+1})) , \quad i = 1, \dots, n .$$

Berechnen Sie die Spektralradien $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ der Matrizen J, H und $B(\omega_{\text{opt}})$, wobei J und H die Matrix des Jacobi–Verfahrens bzw. des Gauss–Seidel–Verfahrens sind und ω_{opt} nach Satz 2.2.13 bestimmt ist. Berücksichtigen Sie Ü31 und die Sätze 2.2.11 und 2.2.12 mit Folgerung. Entwickeln Sie die Konvergenzradien nach Potenzen von $(1/n)$ und werten Sie auch ϱ_i^{1000} für $i = 1, 2, 3$ explizit aus.

A ist symmetrisch und positiv definit. Also sind die Eigenwerte von J nach Ü31 reell. Ausserdem ist A tridiagonal mit invertierbarem Diagonalteil. Also ist sie auch konsistent geordnet. Die Eigenwerte von J sind

$$\lambda_i(J) = \tfrac{1}{2}(2 - 2(1 - \cos(\tfrac{i\pi}{n+1})) = \cos(\tfrac{i\pi}{n+1})$$

und somit gilt

$$\varrho_1 = \cos(\tfrac{\pi}{n+1}) , \quad \varrho_2 = \varrho_1^2$$

letzteres wegen Satz 2.2.12 Folgerung. Nach Satz 2.2.13 existiert also ω_{opt} und

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \cos(\frac{\pi}{n+1})^2}}$$

Taylorentwicklung von $\cos(\frac{\pi}{n+1})$ *ergibt*

$$\begin{aligned}\varrho_1 &= 1 - \tfrac{\pi^2}{2(n+1)^2} + \mathcal{O}(\tfrac{1}{n^4})\\ \varrho_2 &= 1 - \tfrac{\pi^2}{4(n+1)^2} + \mathcal{O}(\tfrac{1}{n^4})\\ \varrho_3 = \omega_{opt} - 1 &= 1 - \tfrac{\pi}{n+1} + \mathcal{O}(\tfrac{1}{n^2})\end{aligned}$$

Für $n = 1000$ *ergibt sich*

$$\begin{aligned}\varrho_1^{1000} &= 0.995087\\ \varrho_2^{1000} &= 0.990198\\ \varrho_3^{1000} &= 0.001879\end{aligned}$$

Man erkennt die hier erzielbare enorme Konvergenzverbesserung. (Dennoch wäre es völlig unsinnig, bei dieser Matrix einen iterativen Löser zu benutzen. Diese Resultate übertragen sich aber direkt auf die Diskretisierung von Δu *im* $\mathbb{R}^2$ *und* $\mathbb{R}^3$*)*

H 31 In der Mechanik treten häufig Gleichungssysteme auf, in denen die Matrix A einen Zusammenhang zwischen Belastung, der rechten Seite b, und der Verformung, der gesuchten Lösung x, beschreibt. Man wird natürlich annehmen, dass bei grösserer Belastung auch die Verformung zunehmen wird. Wann dies im Sinne der natürlichen Halbordnung des $\mathbb{R}^n$ gilt, beschreibt das Folgende.

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt inversmonoton, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$Ax \leq Ay \quad \Rightarrow \quad x \leq y$$

(dies ist komponentenweise zu verstehen)
Zeigen Sie:

$$A \text{ M-Matrix} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ L-Matrix und inversmonoton}$$

(Hinweis zu "$\Leftarrow$": Zeigen Sie zuerst die Regularität von A mittels Widerspruchsbeweis und beweisen Sie dann $A^{-1}e_i \geq 0$)

"$\Rightarrow$" : A M-Matrix $\Rightarrow$ A L-Matrix
Sei $Ax \leq Ay \quad \Rightarrow \quad x \leq y$, da $A^{-1} \geq 0$
"$\Leftarrow$" :

1) *Annahme: A ist nicht regulär. Dann gibt es ein $x \neq 0$ mit $Ax = 0$. Für $y = 0$ gilt offensichtlich $Ax \leq Ay$ bzw. $Ay \leq Ax \quad \Rightarrow \quad x \leq y$ bzw. $y \leq x \quad \Rightarrow \quad x = 0$ als Widerspruch.*

2) *Offensichtlich ist $0 \leq e_i$, wegen $A \cdot 0 = 0 \leq e_i = A \cdot A^{-1}e_i$ folgt $A^{-1}e_i \geq 0$, und dies ist ja gerade die i-te Spalte von A^{-1}.*