Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Sommersemester 2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

29.6.2009

Numerische Lineare Algebra
Übung 10

Präsenzübung

Ü 28 Untersuchen Sie die folgenden Matrizen bezüglich der Kriterien irreduzibel, irreduzibel diagonaldominant, strikt diagonaldominant, L-Matrix, M-Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ü 29 Zeigen Sie, daß die Tridiagonalmatrix

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \gamma_1 & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \beta_{n-1} \\ & & & \gamma_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix} =: (t_{ij})$$

irreduzibel ist, falls

$$\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_{n-1} \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \ldots \cdot \gamma_{n-1} \neq 0$$

Ü 30 Sei A eine M-Matrix mit Diagonale D und Nebendiagonale $-B = A - D$. Sei weiter D' eine nichtnegative Diagonalmatrix und B' eine nichtnegative Matrix mit Diagonale 0 und $B' \leq B$ (komponentenweise). Zeigen Sie:

$$A' = D + D' - (B - B')$$

ist eine M-Matrix und $(A')^{-1} \leq A^{-1}$ (komponentenweise zu verstehen).
Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis folgenden Satz:
Satz: A ist eine M–Matrix genau dann, wenn A eine L–Matrix ist und das Gesamtschrittverfahren für A konvergiert, d.h.

$$\varrho(-D^{-1}(A - D)) < 1 . \quad \square$$

Bezeichnet man mit J bzw. J' die Gesamtschrittmatrix zu A bzw. A', dann gilt:

$$0 \leq J' \leq J \quad \text{(Beweis!)}$$

Folgern Sie daraus $\rho(J') < 1$.

Ü 31 Es sei A reell symmetrisch und positiv definit und

$$A \;=\; D - L - U$$

die hier übliche Zerlegung. Zeigen Sie, dass die Matrix J des Jacobiverfahrens nur reelle Eigenwerte hat.
Hinweis: J ist in der Regel unsymmetrisch. Vielleicht kann man J durch eine Ähnlichkeitstransformation symmetrisieren?

Hausübung

H 29 Zeigen Sie : Jede symmetrische M-Matrix ist positiv definit.
Hinweis: Ü30

H 30 Die $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & & & & & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte

$$\lambda_i = 2(1 - \cos(\tfrac{i\pi}{n+1})) \ , \quad i = 1, \dots, n \ .$$

Berechnen Sie die Spektralradien $\varrho_1, \ \varrho_2, \ \varrho_3$ der Matrizen J, H und $B(\omega_{\text{opt}})$, wobei J und H die Matrix des Jacobi–Verfahrens bzw. des Gauss–Seidel–Verfahrens sind und ω_{opt} nach Satz 2.2.13 bestimmt ist. Berücksichtigen Sie Ü31 und die Sätze 2.2.11 und 2.2.12 mit Folgerung. Entwickeln Sie die Konvergenzradien nach Potenzen von $(1/n)$ und werten Sie auch ϱ_i^{1000} für $i = 1, 2, 3$ explizit aus.

H 31 In der Mechanik treten häufig Gleichungssysteme auf, in denen die Matrix A einen Zusammenhang zwischen Belastung, der rechten Seite b, und der Verformung, der gesuchten Lösung x, beschreibt. Man wird natürlich annehmen, dass bei grösserer Belastung auch die Verformung zunehmen wird. Wann dies im Sinne der natürlichen Halbordnung des $\mathbb{R}^n$ gilt, beschreibt das Folgende.

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt inversmonoton, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$Ax \leq Ay \quad \Rightarrow \quad x \leq y$$

(dies ist komponentenweise zu verstehen)
Zeigen Sie:

$$A \text{ M-Matrix} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ L-Matrix und inversmonoton}$$

(Hinweis zu "$\Leftarrow$": Zeigen Sie zuerst die Regularität von A mittels Widerspruchsbeweis und beweisen Sie dann $A^{-1}e_i \geq 0$)