Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Sommersemester 2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

22.6.2009

Numerische Lineare Algebra
Übung 9

Präsenzübung

Ü 24 Zeigen Sie: Eine äquivalente Umformung

$$Ax^* = b \iff x^* = Gx^* + g \text{ mit } \varrho(G) < 1$$

ist unmöglich, wenn A singulär ist.

Ü 25 Eine Matrix heisst strikt diagonaldominant nach Zeilen bzw. Spalten, wenn

$$\forall\, i : |\alpha_{i,i}| > \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |\alpha_{i,j}|$$

bzw.

$$\forall\, i : |\alpha_{i,i}| > \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |\alpha_{j,i}|$$

Zeigen Sie: eine solche Matrix ist stets invertierbar und das Gesamtschrittverfahren zur Lösung von $Ax^* = b$ ist stets konvergent.

Ü 26 Man beweise, daß die Zeilen einer nichtsingulären Matrix A so permutiert werden können, daß die Diagonalelemente der neu entstandenen Matrix $\tilde{A}$ alle von Null verschieden sind. Hinweis: Entwickeln Sie die Determinante von A nach der ersten Spalte und gehen Sie dann induktiv vor.

Ü 27 Wir werden noch beweisen, dass das SOR–Verfahren für jede positiv definite Matrix mit $0 < \omega < 2$ konvergiert und damit natürlich auch das Gauss–Seidel–Verfahren. Zeigen Sie: Es gibt Werte von α, sodass die Matrix

$$A = (1-\alpha)I + \alpha e e^T\ , \text{ mit } e^T = (1,\ldots,1)$$

positiv definit ist, aber das Gesamtschrittverfahren divergiert. Hinweis: Ü10.

Hausübung

H 26 Es soll das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \xi_i &= 3\xi_{i+1} + b_i, \quad i = 1, ..., n-1 \\ \xi_n &= b_n \end{aligned}$$

gelöst werden.

a) Zeigen Sie: Das Gesamtschrittverfahren konvergiert für alle Startvektoren. Geben Sie $\varrho(J)$ an, J sei die Matrix des Gesamtschrittverfahrens.

b) Sei $b = (0, ..., 0, -3, 1)^T$, $n = 100$ und $x_0 = 0$. Berechnen Sie $||x_k - x^*||_\infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

c) Wie kann man eine Norm konstruieren, in der monotone Konvergenz für jedes b eintritt?

H 27 Zur Lösung der Fixpunktgleichung $x^* = Gx^* + g$ sei das Iterationsverfahren:

$$x_0 \in \mathbb{R}^N \quad x_{k+1} = Gx_k + g$$

gegeben sowie für eine beliebige Norm

$$\varrho_1 := \sup_{x_0 \in \mathbb{C}^N} \limsup_{k \to \infty} ||x_k - x^*||^{1/k}.$$

Zeigen Sie: $\varrho_1 = \varrho(G)$ in folgenden Schritten:

a) Mit $x_0 = x^* + y_0$ gilt: $x_k - x^* = G^k y_0$.

b) Es gilt: $\varrho_1 \geq \varrho(G)$. Wählen Sie dazu $x_0 = x^* + y_0$, wobei y_0 ein geeigneter Eigenvektor von G ist und benutzen Sie Teil a).

c) Nehmen Sie eine Norm $||\cdot||_\epsilon$ mit der Eigenschaft: $||G||_\epsilon \leq \varrho(G) + \epsilon$, $\epsilon > 0$ beliebig. Zeigen Sie damit:

$$||x_k - x^*|| \leq C\,(\varrho(G) + \epsilon)^k\, ||x_0 - x^*||.$$

In dieser Ungleichung ist C eine Konstante, die sich aus der Normenwahl ergibt. Beweisen Sie nun die gesamte Aussage.

H 28 **a)** Für welche $\omega \in \mathbb{R}$ konvergiert das Iterationsverfahren

$$x_{k+1} = x_k + \omega(b - Ax_k)$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gegen die Lösung x^* von $Ax^* = b$, wenn A symmetrisch und positiv definit ist?

b) Wie muß man im allgemeinen Ansatz im Skript M, N und C wählen, um das Verfahren aus a) zu erhalten?

c) Für welches ω ist $\varrho(I - \omega A)$ minimal? (Skizze!)

d) Zeigen Sie, daß $\omega_0, ..., \omega_{n-1}$ existieren, sodaß für

$$x_{k+1} \quad = \quad x_k + \omega_k(b - Ax_k)$$

$x_n = x^*$ gilt. Zeigen Sie zunächst die Darstellung:

$$x_k - x^* \quad = \quad \left(\Pi_{i=0}^{k-1}(I - \omega_i A)\right)(x_0 - x^*).$$

Interpretieren Sie das Verfahren. (x_0 läßt sich als Linearkombination von x^* und den Eigenvektoren von A schreiben).

Hinweis: Benutzen Sie die Spektralzerlegung von A zur formalen Vereinfachung:

$$A \;=\; V\Lambda V^T$$

mit unitärem V und Λ als Diagonalmatrix der Eigenwerte.

Numerische Lineare Algebra
Übung 9, Lösungsvorschlag

Präsenzübung

Ü 24 Zeigen Sie: Eine äquivalente Umformung

$$Ax^* = b \iff x^* = Gx^* + g \text{ mit } \varrho(G) < 1$$

ist unmöglich, wenn A singulär ist.

Wäre die angegebene Umformung möglich, dann wäre das Iterationsverfahren

$$x_{k+1} = Gx_k + g$$

für jede rechte Seite b gegen die (eine) Lösung von $Ax^* = b$ konvergent. Ist aber A singulär, dann gibt es stets b sodass das Gleichungssystem unlösbar ist.

Ü 25 Eine Matrix heisst strikt diagonaldominant nach Zeilen bzw. Spalten, wenn

$$\forall\, i \ : |\alpha_{i,i}| > \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |\alpha_{i,j}|$$

bzw.

$$\forall\, i \ : |\alpha_{i,i}| > \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |\alpha_{j,i}|$$

Zeigen Sie: eine solche Matrix ist stets invertierbar und das Gesamtschrittverfahren zur Lösung von $Ax^* = b$ ist stets konvergent.

Wäre die Matrix singulär, so hätte sie einen Eigenwert 0. Nach dem Kreisesatz von Gerschgorin ist dies aber unmöglich. Die Matrix des Gesamtschrittverfahrens hat die Elemente

$$J_{i,j} = -\frac{\alpha_{i,j}}{\alpha_{i,i}}$$

und demnach ist

$$\| J \|_\infty < 1 \text{ oder } \| J \|_1 < 1$$

und damit natürlich

$$\varrho(J) < 1 \ .$$

Ü 26 Man beweise, daß die Zeilen einer nichtsingulären Matrix A so permutiert werden können, daß die Diagonalelemente der neu entstandenen Matrix $\tilde{A}$ alle von Null verschieden sind. Hinweis: Entwickeln Sie die Determinante von A nach der ersten Spalte und gehen Sie dann induktiv vor.

Man streiche bei A die 1.Spalte und i-te Zeile und nenne das Resultat A_i ($\in \mathbb{C}^{n-1,n-1}$); dann ist

$$0 \neq det(A) \;=\; \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} det(A_i) \alpha_{i,1} \quad \Rightarrow$$

Es existiert ein $i_o \in \{1,...,n\}$ mit $\alpha_{i_0,1} \neq 0,\;\; det(A_{i_o}) \neq 0$. Sei

$$\tilde{A}^{(1)} := \begin{pmatrix} \alpha_{i_o,1} & * & \cdots & * \\ * & & & \\ \vdots & & A_{i_o} & \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Fortsetzung des Verfahrens mit A_{i_o} usw. liefert die Behauptung.

Ü 27 Wir werden noch beweisen, dass das SOR–Verfahren für jede positiv definite Matrix mit $0 \;<\; \omega \;<\; 2$ konvergiert und damit natürlich auch das Gauss–Seidel–Verfahren. Zeigen Sie: Es gibt Werte von α, sodass die Matrix

$$A \;=\; (1-\alpha)I + \alpha e e^T \;,\; \text{mit } e^T \;=\; (1,\ldots,1)$$

positiv definit ist, aber das Gesamtschrittverfahren divergiert. Hinweis: Ü10.

Nach Ü10 hat die symmetrische Rang-1-Matrix ee^T die Eigenwerte n und 0 als $(n-1)-$fachen Eigenwert, also hat die Matrix A die Eigenwerte

$$1-\alpha \;(\;(n-1) - \mathit{fach}\;) \quad \mathit{und} \quad 1 + (n-1)\alpha \;.$$

Sie ist somit positiv definit für

$$-\tfrac{1}{n-1} \;<\; \alpha \;<\; 1 \;.$$

Da A die Diagonale $(1,\ldots,1)$ hat, hat die Matrix J des Jacobi–Verfahrens die Eigenwerte

$$-\alpha \;(\;(n-1) - \mathit{fach}\;) \quad \mathit{und} \quad (n-1)\alpha \;.$$

und somit konvergiert dieses Verfahren nur für

$$-\tfrac{1}{n-1} \;<\; \alpha \;<\; \tfrac{1}{n-1}$$

Somit haben wir für $\tfrac{1}{n-1} \;\leq\; \alpha \;<\; 1$ zwar positive Definitheit, aber keine Konvergenz des Jacobi–Verfahrens.

Hausübung

H 26 Es soll das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \xi_i &= 3\xi_{i+1} + b_i, \quad i = 1, ..., n-1 \\ \xi_n &= b_n \end{aligned}$$

gelöst werden.

a) Zeigen Sie: Das Gesamtschrittverfahren konvergiert für alle Startvektoren. Geben Sie $\varrho(J)$ an, J sei die Matrix des Gesamtschrittverfahrens.

b) Sei $b = (0, ..., 0, -3, 1)^T$, $n = 100$ und $x_0 = 0$. Berechnen Sie $||x_k - x^*||_\infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

c) Wie kann man eine Norm konstruieren, in der monotone Konvergenz für jedes b eintritt?

Mit $x = (\xi_1, ..., \xi_n)^T, \quad b = (b_1, ..., b_n)^T$ *ist also*

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & 1 & -3 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix} \quad \textit{bzw.} \quad Ax = b$$

a) Sei J die Matrix des Gesamtschritt(Jacobi)–Verfahrens.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 3 & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & 0 & 3 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, daß $\varrho(J) = 0$ und damit die Konvergenz für alle Startvektoren.

b) Offensichtlich ist $x^* = e_n$ und

$$Je_n = 3e_{n-1}, \quad Je_{n-1} = 3e_{n-2} \quad \Rightarrow \quad J^k e_n = \begin{cases} 3^k e_{n-k} & \text{für } k < n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wegen $||x_k - x^*||_\infty = ||J^k(x_0 - x^*)||_\infty, \ x_0 = 0, \ x^* = e_n$ *ist*

$$||x_k - x^*||_\infty = \begin{cases} 3^k & \text{für } k < n \\ 0 & \text{für } k \geq n \end{cases}$$

d.h. die Approximation wird immer schlechter, aber im 100. Schritt wird das exakte Ergebnis geliefert. Das ist eine Art von Konvergenz, die praktisch wertlos ist.

c) Die transformierte Vektornorm, in der Monotonie des Fehlers vorliegt, also

$$\| x_k - x^* \|_T < \| x_{k-1} - x^* \|_T$$

kann z.B. konstruiert werden als

$$\| x \|_T \overset{def}{=} \| Tx \|_\infty$$

mit

$$T \;=\; \mathrm{diag}(1, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^{n-1}) \quad \mathit{mit}\ \beta \;>\; 3$$

d.h.

$$\| J \|_T = \| TJT^{-1} \|_\infty$$

und die "Einheitskugel" dieser Norm ist ein extrem längenverzerrter Würfel.

H 27 Zur Lösung der Fixpunktgleichung $x^* = Gx^* + g$ sei das Iterationsverfahren:

$$x_0 \in \mathbb{R}^N \quad x_{k+1} = Gx_k + g$$

gegeben sowie für eine beliebige Norm

$$\varrho_1 \;:=\; \sup_{x_0 \in \mathbb{C}^N} \limsup_{k \to \infty} ||x_k - x^*||^{1/k}\,.$$

Zeigen Sie: $\varrho_1 = \varrho(G)$ in folgenden Schritten:

a) Mit $x_0 = x^* + y_0$ gilt: $x_k - x^* = G^k y_0$.

b) Es gilt: $\varrho_1 \geq \varrho(G)$. Wählen Sie dazu $x_0 = x^* + y_0$, wobei y_0 ein geeigneter Eigenvektor von G ist und benutzen Sie Teil a).

c) Nehmen Sie eine Norm $||\cdot||_\epsilon$ mit der Eigenschaft: $||G||_\epsilon \leq \varrho(G) + \epsilon$, $\epsilon > 0$ beliebig. Zeigen Sie damit:

$$||x_k - x^*|| \;\leq\; C\,(\varrho(G) + \epsilon)^k\,||x_0 - x^*||\,.$$

In dieser Ungleichung ist C eine Konstante, die sich aus der Normenwahl ergibt. Beweisen Sie nun die gesamte Aussage.

a) Durch Induktion folgt:

$$\begin{aligned} x_k - x^* &= Gx_{k-1} + g - Gx^* - g \\ &= G(x_{k-1} - x^*) \\ &= G^k(x_0 - x^*) \end{aligned}$$

b) Wir wählen für y_0 einen Eigenvektor zum betragsgrößten Eigenwert. Dann gilt mit Teil a): $x_k - x^* \;=\; \lambda^k y_0$. Damit

$$||x_k - x^*|| \;=\; \left|\lambda^k\right| ||y_0|| \;\Rightarrow\; ||x_k - x^*||^{1/k} \;=\; |\lambda| \, ||y_0||^{1/k}.$$

Die rechte Seite konvergiert gegen $\varrho(G)$. Weil ein spezielles x_0 gewählt wurde und das Supremum gebildet wird gilt die Ungleichung.

c) Es existiert eine Vektornorm $||\cdot||_\epsilon$ deren zugeordnete Matrixnorm die geforderte Ungleichung erfüllt. Ferner gibt es Konstanten m_ϵ und M_ϵ mit

$$m_\epsilon ||x|| \leq ||x||_\epsilon \leq M_\epsilon ||x|| \quad \forall x \in \mathbb{C}^N.$$

Mit beliebigem x_0 folgt:

$$\begin{aligned} ||x_k - x^*|| &= \left|\left|G^k\left(x_0 - x^*\right)\right|\right| &&\leq \frac{1}{m_\epsilon}\left|\left|G^k\left(x_0 - x^*\right)\right|\right|_\epsilon \\ &\leq \frac{1}{m_\epsilon}\left|\left|G^k\right|\right|_\epsilon ||x_0 - x^*||_\epsilon &&\leq \frac{M_\epsilon}{m_\epsilon}\left(\varrho(G) + \epsilon\right)^k ||x_0 - x^*||. \end{aligned}$$

Nach dem Wurzelziehen folgt $\varrho_1 \leq \varrho(G) + \epsilon$. Weil wir ϵ beliebig klein machen können, folgt die Aussage.

H 28 **a)** Für welche $\omega \in \mathbb{R}$ konvergiert das Iterationsverfahren

$$x_{k+1} \;=\; x_k + \omega(b - Ax_k)$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gegen die Lösung x^* von $Ax^* = b$, wenn A symmetrisch und positiv definit ist?

b) Wie muß man im allgemeinen Ansatz im Skript M, N und C wählen, um das Verfahren aus a) zu erhalten?

c) Für welches ω ist $\varrho(I - \omega A)$ minimal? (Skizze!)

d) Zeigen Sie, daß $\omega_0, ..., \omega_{n-1}$ existieren, sodaß für

$$x_{k+1} \;=\; x_k + \omega_k(b - Ax_k)$$

$x_n = x^*$ gilt. Zeigen Sie zunächst die Darstellung:

$$x_k - x^* \;=\; \left(\Pi_{i=0}^{k-1}(I - \omega_i A)\right)(x_0 - x^*).$$

Interpretieren Sie das Verfahren. (x_0 läßt sich als Linearkombination von x^* und den Eigenvektoren von A schreiben).

Hinweis: Benutzen Sie die Spektralzerlegung von A zur formalen Vereinfachung:

$$A \;=\; V \Lambda V^T$$

mit unitärem V und Λ als Diagonalmatrix der Eigenwerte.

a) *Es ist*

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x^* &= x_k - x^* + \omega\,(b - Ax_k) \\ &= x_k - x^* + \omega\,(Ax^* - Ax_k) \\ &= x_k - x^* - \omega A\,(x_k - x^*) \;=\; (I - \omega A)\,(x_k - x^*) \end{aligned}$$

Also mit Induktion $x_k - x^* = (I - \omega A)^k\,(x_0 - x^*)$. *Konvergenz liegt genau dann vor, wenn* $\varrho(I - \omega A) < 1$ *gilt. Seien* $B(\omega) = (I - \omega A)$ *und* $0 < \lambda_1 \le ... \le \lambda_n$ *die Eigenwerte von* A, *so sind* $\mu_i = 1 - \omega\lambda_i$ *die Eigenwerte von* $B(\omega)$. *Wegen*

$$\max_i |1 - \omega\lambda_i| \;=\; \varrho(B(\omega)) < 1$$

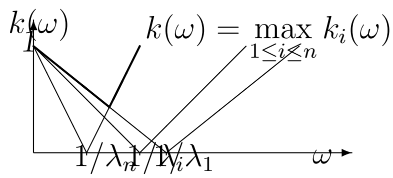
liegt genau dann Konvergenz vor, wenn $\omega \in (0, 2/\lambda_n)$.

b)

$$C = I,\; M = 0,\; N = A \quad \Rightarrow \quad I - \omega A = B(\omega) = (\omega M + C)^{-1}\,(C - \omega N)\,.$$

c) *Es gilt:*

$$k_i(\omega) := |1 - \omega\lambda_i| \quad \Rightarrow \quad k(\omega) := \varrho(B(\omega)) = \max_{1\le i\le n} k_i(\omega)$$



Das Minimum von $k(\omega)$ *wird für* $k_1(\omega) = k_n(\omega)$ *angenommen. d.h.*

$$\omega_{opt} \;=\; \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$$

d) *Es gilt*

$$\begin{aligned} x_1 - x^* &= (I - \omega_0 A)(x_0 - x^*) &&= \left(\Pi_{i=0}^{0}(I - \omega_i A)\right)(x_0 - x^*) \\ \Rightarrow && \\ x_{k+1} - x^* &= x_k - x^* + \omega_k(b - Ax_k) && \\ &= (I - \omega_k A)(x_k - x^*) &&= \left(\Pi_{i=0}^{k}(I - \omega_i A)\right)(x_0 - x^*) \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir:

$$x_n - x^* \;=\; \underbrace{\left(\Pi_{i=0}^{n-1}(I - \omega_i A)\right)}_{=:p(A)}(x_0 - x^*)$$

mit dem Matrixpolynom $p(A)$. *Weil* A *symmetrisch ist, gibt es eine orthogonale Matrix* V *mit* $V^TAV = diag\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. *Daher gilt*

$$\begin{aligned} V^Tp(A)V \;=\; p(V^TAV) &= p\,(diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)) \\ &= diag\,(p(\lambda_1), ..., p(\lambda_n))\,. \end{aligned}$$

Wählen wir $\omega_i = 1/\lambda_{i+1}$, so folgt sofort $p(A) = 0$, d.h. $x_n - x^* = 0$. (Jede Permutation der Eigenwerte ergibt das Gleiche).
Zur Interpretation betrachten wir $x_0 = x^* + \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$ mit den Eigenvektoren e_i der Matrix A. Es folgt:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{1}{\lambda_1}(Ax_0 - b) &&= x^* + \sum_{i=1}^n \mu_i e_i - \frac{1}{\lambda_1}\left(A\sum_{i=1}^n \mu_i e_i\right) \\ &= x^* + \sum_{i=1}^n \mu_i e_i - \sum_{i=2}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_1}\mu_i e_i - \mu_1 e_1 &&= x^* + \sum_{i=2}^n \tilde{\mu}_i e_i \end{aligned}$$

In jedem Schritt wird ein Eigenvektoranteil der Störung von der Lösung eliminiert. Die Größe $Ax - b$ ist der Gradient der Funktion $0.5x^TAx - b^Tx$ und x^* ist das Minimum dieser Funktion.