Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Sommersemester 2009

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

22.6.2009

Numerische Lineare Algebra
Übung 9

Präsenzübung

Ü 24 Zeigen Sie: Eine äquivalente Umformung

$$Ax^* \;=\; b \iff x^* \;=\; Gx^* + g \text{ mit } \varrho(G) \;<\; 1$$

ist unmöglich, wenn A singulär ist.

Ü 25 Eine Matrix heisst strikt diagonaldominant nach Zeilen bzw. Spalten, wenn

$$\forall\ i\ : |\alpha_{i,i}| \;>\; \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |\alpha_{i,j}|$$

bzw.

$$\forall\ i\ : |\alpha_{i,i}| \;>\; \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |\alpha_{j,i}|$$

Zeigen Sie: eine solche Matrix ist stets invertierbar und das Gesamtschrittverfahren zur Lösung von $Ax^* \;=\; b$ ist stets konvergent.

Ü 26 Man beweise, daß die Zeilen einer nichtsingulären Matrix A so permutiert werden können, daß die Diagonalelemente der neu entstandenen Matrix $\tilde{A}$ alle von Null verschieden sind. Hinweis: Entwickeln Sie die Determinante von A nach der ersten Spalte und gehen Sie dann induktiv vor.

Ü 27 Wir werden noch beweisen, dass das SOR–Verfahren für jede positiv definite Matrix mit $0 \;<\; \omega \;<\; 2$ konvergiert und damit natürlich auch das Gauss–Seidel–Verfahren. Zeigen Sie: Es gibt Werte von α, sodass die Matrix

$$A \;=\; (1-\alpha)I + \alpha ee^T\ ,\ \text{mit } e^T \;=\; (1,\ldots,1)$$

positiv definit ist, aber das Gesamtschrittverfahren divergiert. Hinweis: Ü10.

Hausübung

H 26 Es soll das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \xi_i &= 3\xi_{i+1} + b_i, \quad i = 1, ..., n-1 \\ \xi_n &= b_n \end{aligned}$$

gelöst werden.

a) Zeigen Sie: Das Gesamtschrittverfahren konvergiert für alle Startvektoren. Geben Sie $\varrho(J)$ an, J sei die Matrix des Gesamtschrittverfahrens.

b) Sei $b = (0, ..., 0, -3, 1)^T$, $n = 100$ und $x_0 = 0$. Berechnen Sie $||x_k - x^*||_\infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

c) Wie kann man eine Norm konstruieren, in der monotone Konvergenz für jedes b eintritt?

H 27 Zur Lösung der Fixpunktgleichung $x^* = Gx^* + g$ sei das Iterationsverfahren:

$$x_0 \in \mathbb{R}^N \quad x_{k+1} = Gx_k + g$$

gegeben sowie für eine beliebige Norm

$$\varrho_1 := \sup_{x_0 \in \mathbb{C}^N} \limsup_{k \to \infty} ||x_k - x^*||^{1/k} .$$

Zeigen Sie: $\varrho_1 = \varrho(G)$ in folgenden Schritten:

a) Mit $x_0 = x^* + y_0$ gilt: $x_k - x^* = G^k y_0$.

b) Es gilt: $\varrho_1 \geq \varrho(G)$. Wählen Sie dazu $x_0 = x^* + y_0$, wobei y_0 ein geeigneter Eigenvektor von G ist und benutzen Sie Teil a).

c) Nehmen Sie eine Norm $||\cdot||_\epsilon$ mit der Eigenschaft: $||G||_\epsilon \leq \varrho(G) + \epsilon$, $\epsilon > 0$ beliebig. Zeigen Sie damit:

$$||x_k - x^*|| \leq C\,(\varrho(G) + \epsilon)^k\, ||x_0 - x^*|| .$$

In dieser Ungleichung ist C eine Konstante, die sich aus der Normenwahl ergibt. Beweisen Sie nun die gesamte Aussage.

H 28 **a)** Für welche $\omega \in \mathbb{R}$ konvergiert das Iterationsverfahren

$$x_{k+1} = x_k + \omega(b - Ax_k)$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gegen die Lösung x^* von $Ax^* = b$, wenn A symmetrisch und positiv definit ist?

b) Wie muß man im allgemeinen Ansatz im Skript M, N und C wählen, um das Verfahren aus a) zu erhalten?

c) Für welches ω ist $\varrho(I - \omega A)$ minimal? (Skizze!)

d) Zeigen Sie, daß $\omega_0, ..., \omega_{n-1}$ existieren, sodaß für

$$x_{k+1} \quad = \quad x_k + \omega_k(b - Ax_k)$$

$x_n = x^*$ gilt. Zeigen Sie zunächst die Darstellung:

$$x_k - x^* \quad = \quad \left(\Pi_{i=0}^{k-1}(I - \omega_i A)\right)(x_0 - x^*).$$

Interpretieren Sie das Verfahren. (x_0 läßt sich als Linearkombination von x^* und den Eigenvektoren von A schreiben).

Hinweis: Benutzen Sie die Spektralzerlegung von A zur formalen Vereinfachung:

$$A \;=\; V\Lambda V^T$$

mit unitärem V und Λ als Diagonalmatrix der Eigenwerte.