Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Sommersemester 2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

15.6.2009

# Numerische Lineare Algebra
# Übung 8

## Präsenzübung

**Ü 21** Die Konditionszahl einer $m \times n$-Matrix vom Rang $n$ ist definiert als

$$\operatorname{cond}(A) \stackrel{def}{=} \frac{\max\{||Ax|| \ : \ ||x|| = 1\}}{\min\{||Ax|| \ : \ ||x|| = 1\}}$$

Welcher Wert ergibt sich für die euklidische Norm unter Anwendung der SVD?

**Ü 22** Sei $A$ eine beliebige komplexe $m \times n$-Matrix. Eine $n \times m$–Matrix $A^{\#}$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} A^{\#}A &= (A^{\#}A)^H \\ AA^{\#} &= (AA^{\#})^H \\ A^{\#}AA^{\#} &= A^{\#} \\ AA^{\#}A &= A \end{aligned}$$

heisst Moore–Penrose–Pseudoinverse von $A$. Man kann zeigen, daß sie eindeutig bestimmt ist. Zeigen Sie: Ist

$$A = USV^H$$

eine Singulärwertzerlegung von $A$, dann gilt

$$A^{\#} = VS^{\#}U^H$$

wobei $S^{\#}$ aus $S$ entsteht durch Transposition und Ersetzung der Nichtnullwerte $s_{i,i}$ durch ihre Reziprokwerte.

**Ü 23** Es sei

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0 & -0.8 \end{pmatrix} = U\Sigma V^T$$

eine Singulärwertzerlegung von $A$.

Geben Sie explizit $x \in \mathbb{R}^4$ und $y \in \mathbb{R}^3$ an, so dass $\|xy^T\|_2$ minimal ist und $\operatorname{Rang}(A + xy^T) = 2$.
Hinweis: H6

**Hausübung**

**H 22** Zeigen Sie:
Ist $A$ eine beliebige reelle $m \times n$–Matrix mit $m \geq n$ und $\alpha > 0$, dann ist

$$x(\alpha) = (\alpha I + A^T A)^{-1} A^T b$$

wohldefiniert und es existiert

$$x^* = \lim_{\alpha \to 0^+} x(\alpha) \ .$$

Ferner gilt:

$$\|x^*\|_2 = \min\{\|y\|_2 : \|Ay - b\|_2 \leq \|Az - b\|_2 \text{ für alle } z \in \mathbb{R}^n\} \quad .$$

Lässt sich $x(\alpha)$ auch als Lösung einer linearen Ausgleichsaufgabe darstellen und so eventuell numerisch besser berechnen?

**H 23** Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, daß die allgemeine Lösung der linearen Ausgleichsaufgabe

$$\text{Minimiere } \|Ax - b\|_2$$

in der Form

$$x^* = A^{\#} b + (I - A^{\#} A) z, \quad z \in \mathbb{R}^n \text{ beliebig}$$

geschrieben werden kann.

**Hinweis:** Es sei $A = U\binom{\Sigma}{0}V^T$ die (SVD) von $A$ und $A^{\#} = V(\Sigma^{\#}, 0)U^T$, wobei die Elemente der Diagonalmatrix $\Sigma^{\#}$ entweder die Kehrwerte der Singulärwerte $\sigma_i$ sind, falls $\sigma_i \neq 0$, oder 0 falls $\sigma_i = 0$.

**H 24** $U\Sigma V^H$ sei die Singulärwertzerlegung der Matrix $A \in \mathbb{C}^{m,n}$ mit den singulären Werten $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq 0$. Daraus bilde man die Matrizen $\Sigma_r$ und $A_r := U\Sigma_r V^H$, indem man nur die ersten $r$ singulären Werte beibehält, also $\sigma_k$ durch Null ersetzt für alle $k > r$.

**a)** Was sind die singulären Werte von $A - A_r$ und berechne $||A - A_r||_2$.
Zeige Rang$A_r \leq r$.

**b)** Es gibt keine Matrix $B$ vom Rang höchstens $r$ mit $||A - B||_2 < \sigma_{r+1}$.

Hinweis: H6

**H 25** Gegeben seien $N \gg 3$ Punkte im $\mathbb{R}^3$. Gesucht ist eine Ebene im $\mathbb{R}^3$, sodaß die Summe der Quadrate der orthogonalen Abstände dieser Ebene von den gegebenen Punkten minimal wird. Zeigen Sie, dass man dieses Problem als eine homogene Kleinste-Quadrate Aufgabe mit der Matrix $A$ mit der $i-$ten Zeile

$$[\xi_i, \eta_i, \zeta_i, 1] \ , \ x^i \ = \ (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)^T$$

lösen kann, d.h. in der Form

$$||Ac||_2 \stackrel{!}{=} \min_c \ \text{mit} \ ||c||_2 \ = \ 1 \ .$$

Wie kann man nun die Singulärwertzerlegung von $A$ benutzen, um die Lösung “direkt“ anzugeben?
Hinweis: Wie drückt sich der Abstand des Punktes $x^i$ von der gesuchten Ebene in der Hessenormalform der Ebene aus?