Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Sommersemester 2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

8.5.2009

Numerische Lineare Algebra
Übung 7

Präsenzübung

Ü 18 Zeigen Sie, daß das Lanczos-Verfahren angewandt auf die Matrix A mit dem Startvektor $x^{(0)}$ dieselbe Tridiagonalmatrix T liefert wie für die Matrix $Q^T AQ$ mit dem Startvektor $Q^T x^{(0)}$, falls Q unitär ist. Was folgt daraus für die theoretische Analyse des Verfahrens?

Ü 19 **Beweis von Satz 1.8.2**
Zeigen Sie:
Sei V_j eine orthonormierte Eigenvektormatrix von T_j (Tridiagonalmatrix aus dem Lanczos–Verfahren für die Matrix A):

$$V_j^T T_j V_j = diag(\Theta_1, \dots, \Theta_j),$$

und Y_j sei definiert durch

$$Y_j = Q_j V_j = (y_1, \dots, y_j).$$

Dann gilt

$$\|Ay_i - \Theta_i y_i\|_2 = |\beta_j|\ |v_{ji}|.$$

Hinweis: Fassen Sie die Rekursion des Lanczos-Verfahrens in Matrixschreibweise zusammen, um AQ_j zu berechnen.

Ü 20 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie mit Startvektor $x_0 = (1, 1, 1)^T$ und dem Lanczos-Verfahren die symmetrische Tridiagonalmatrix T_3.

Hausübung

H 19 Zeigen Sie: Das Lanczos-Verfahren, angewandt auf die Matrix A und die Matrix $A - \sigma I$ bei beliebigem σ erzeugt die selbe Matrix Q_k, wenn der gleiche Startvektor benutzt wird.

H 20 Gegeben sei eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit einem einfachen Eigenwert λ_1 und dem zugehörigen Eigenvektor r_1. Zeigen Sie, daß die tridiagonale Matrix T aus der Lanczos-Zerlegung nach Abbruch mit $\beta_{k+1} = 0$ keinen Eigenwert gleich λ_1 hat, wenn der Startvektor $x^{(0)}$ senkrecht auf r_1 steht.
Hinweis: Verwenden Sie das Resultat der Aufgabe **Ü 18** und beachten Sie, daß A unitär diagonalisierbar ist.

H 21 Wegen des Verlustes der Orthogonalität beim Lanczos-Verfahren bei gerundetem Rechnen ist es üblich, die $q^{(i)}$–Vektoren (wenigstens partiell) zu orthogonalisieren. Wir betrachten hier den Fall der vollständigen Orthogonalisierung von $q^{(i)}$ bezüglich $q^{(1)}, \ldots, q^{(i-1)}$. Zeigen Sie, daß bei exakter Rechnung der folgende Algorithmus die gleiche Q_k–Matrix erzeugt wie der Standard-Lanczos-Algorithmus, daß aber unter Rundungseinfluss die von ihm erzeugten Vektoren bis auf Maschinengenauigkeit orthogonal bleiben. Benutzen Sie ohne Beweis, daß die Spalten von gerundet berechneten Produkten von Householdermatrizen numerisch bis auf Maschinengenauigkeit orthogonal bleiben. Im Folgenden bezeichnet H_k eine Householdermatrix, die durch die Transformationseigenschaft bezüglich eines spezifizierten Vektors festgelegt wird und die letzten $n - k$ Komponenten dieses Vektors in null überführt und $e_1, \ldots, e_{k-1}$ invariant lässt.

```
beta_0 = 0 ;  q_0 = 0 ;
q_1  ist der gegebene normierte Startvektor.
H_1 q_1 = e_1 ;

for k=1,...,n-1
   alpha_k = q_k'Aq_k ;
   r_{k+1}  = (A- alpha_{k}I) q_{k} - beta_{k-1} q_{k-1} ;
   w = (H_k * .... * H_1) r_{k+1} ;
   H_{k+1} w = ( w_{k,1},...,w{k,k},beta_k,0,...,0)' ;
   q_{k+1} = H_1*....*H_{k+1} e_{k+1};
end
alpha_n = q_n'Aq_n;
```