Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Sommersemester 2009

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

25.5.2009

Numerische Lineare Algebra
Übung 6

Präsenzübung

Ü 15 Sei
$$H = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$$
reell und $M = Q^T HQ$ die aus einem QR-Schritt mit dem Shift z hervorgegangene Matrix. Zeigen Sie:
$$|m_{21}| = \frac{|y^2 x|}{|w-z|^2 + |y|^2}$$
Was bedeutet dies im Falle $x = y$? Was würde passieren, wenn man den Wilkinsonshift anwenden würde?

Ü 16 Zeigen Sie: Ist A obere Hessenbergmatrix und B invertierbare obere Dreiecksmatrix, dann gilt:

1. AB^{-1} ist obere Hessenbergmatrix.
2. Die Elemente (2,1) von $AB^{-1} - \mu I$ und von $A - \mu B$ werden durch die gleiche Ähnlichkeitstransformation mit einer Givensmatrix in null überführt.

Ü 17 (*Transformation eines nichtlinearen Eigenwertproblems*)
Gegeben sei das quadratische Eigenwertproblem
$$\left(A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0\right) x = 0,$$
mit regulärer Matrix A_2.

a) Transformieren Sie dieses polynomiale Problem in ein gewöhnliches lineares Eigenwertproblem doppelter Dimension
$$C\tilde{x} = \lambda\tilde{x}.$$
Hinweis: Eliminieren Sie zunächst den Matrixkoeffizienten vor λ^2 und setzen Sie dann den neuen Eigenvektor an als $\tilde{x} = (\lambda x, x)^T$. Wie lautet die Matrix C ?

b) Wie würde die Transformation bei einem allgemeinen polynomialen Eigenwertproblem
$$(p(\lambda))\, x = \left(\sum_{i=0}^{m} A_i\lambda^i\right) x = 0$$
(A_m regulär) aussehen ?

Hausübung

H 16 Zeigen Sie: Sind A und B beliebige reelle $n \times n$ Matrizen, dann existieren (komplex) unitäre Matrizen Q und Z mit

$$Q^H AZ \ = \ R_A \quad \text{und} \quad Q^H BZ \ = \ R_B$$

wobei R_A und R_B obere Dreiecksmatrizen sind. Wie stellt sich damit die Lösung des allgemeinen Eigenwertproblems

$$Ax \ = \ \lambda Bx$$

dar? Warum muss man u.U. Q und Z komplex wählen, auch wenn A und B reell sind? (Die Aussage gilt natürlich auch für komplexe A, B)
Hinweis: Approximieren Sie B durch eine Folge invertierbarer Matrizen B_k. Benutzen Sie die Existenz der QR-Zerlegung und der Schur-Normalform für beliebige Matrizen.

H 17 Formulieren Sie das Wielandt-Verfahren mit Shift zur Bestimmung eines Eigenvektors eines allgemeinen Eigenwertproblems

$$Ax \ = \ \lambda Bx$$

mit reell symmetrischem A und reell symmetrischem positiv definitem B. Es soll dabei weder die Inverse von B noch die Cholesky-Zerlegung von B benutzt werden. Es tritt auch hier die Aufgabe einer mehrfachen Gleichungslösung mit einer festen Matrix auf, wenn der Shift festgehalten wird. Welches Problem entsteht bei dieser Gleichungslösung? Könnte man das Problem durch eine unitäre Vortransformation a la Tridiagonalisierung vereinfachen?
Hinweis: Arbeiten Sie zunächst formal mit der Choleskyzerlegung von B (Transformation auf ein Standard-Eigenwertproblem) und übersetzen Sie dann in die Originaldaten zurück.

H 18 Aufgabe aus NUMAWWW: Die "Balkenmatrix" beschreibt die Schwingungen eines an einem Ende fest eingespannten und am anderen Ende momentenfrei gelagerten Balkens ohne äussere Kraft und ohne Berücksichtigung von Reibung. Diese Matrix ist eine symmetrische, positiv definite Fünfbandmatrix mit nur einfachen Eigenwerten, die formelmässig bekannt sind. Verwenden Sie NUMAWWW/Eigenwertprobleme "QL-Verfahren" und zum Vergleich die Kombination "Bisektion/Wielandt", um alle Eigenwerte und Eigenvektoren im Falle $n = 30$ zu finden. Protokollieren Sie die Schrittzahlen (beim Wielandtverfahren werden pro Vektor 3 Iterationsschritte durchgeführt) und berechnen Sie daraus den Gesamtaufwand an Multiplikationen und Additionen. Bewerten Sie eine Divison mit 3 Multiplikationen und Additionen und eine Quadratwurzel mit 10 Multiplikationen und Additionen. Bedenken Sie, dass beim QL-Verfahren die Givensrotationen jeweils auch auf die volle (durch Akkumulation aller Transformationen entstehende) $n \times n$ Matrix U anzuwenden sind. Da in beiden Fällen die gleiche Vortransformation auf Tridiagonalgestalt vorzunehmen ist, lassen Sie diese unberücksichtigt. Bedenken Sie aber, dass bei der Variante "Bisektion/Wielandt" die gefundenen Eigenvektoren noch mit der Transformationsmatrix zurücktransformiert werden müssen, während im QL-Fall einfach weiter in die vorliegende Transformationsmatrix hineinmultipliziert wird.

Bem.: Das QL-Verfahren ist eine einfache Variante des besprochenen QR-Verfahrens mit Wilkinsonshift. Diese Variante besteht darin, dass es, auf eine untere Hessenbergform und die entsprechende Zerlegung

$$A = LQ \quad \text{mit} \quad L \quad \text{untere Dreiecksmatrix}$$

angewandt wird, d.h. jetzt soll das Element $a_{1,2}$ gegen null gehen. Im reell symmetrischen Fall ist natürlich $a_{1,2} = a_{2,1}$

Numerische Lineare Algebra
Übung 6, Lösungsvorschlag

Präsenzübung

Ü 15 Sei

$$H = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$$

reell und $M = Q^T HQ$ die aus einem QR-Schritt mit dem Shift z hervorgegangene Matrix. Zeigen Sie:

$$|m_{21}| = \frac{|y^2 x|}{|w-z|^2 + |y|^2}$$

Was bedeutet dies im Falle $x = y$? Was würde passieren, wenn man den Wilkinsonshift anwenden würde?

Es gilt

$$H - zI = \begin{pmatrix} w-z & x \\ y & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha := |w-z|^2 + |y|^2, \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \begin{pmatrix} w-z & y \\ y & z-w \end{pmatrix}$$

sodaß

$$m_{21} = e_2^T M e_1 = e_2^T (RQ + zI) e_1 = (e_2^T R)(Qe_1) = r_{22} \frac{y}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\text{wegen } R = Q(H - zI) \text{ folgt } r_{22} = \frac{xy}{\sqrt{\alpha}} \text{ d.h. } |m_{21}| \;=\; \frac{|y^2 x|}{\alpha}$$

Dieser Ausdruck ist nur für $w = z$ und $y = 0$ nicht definiert. In diesem Fall liegt aber bereits die Schur-Form vor. Ist dann $x \neq y$, dann ist die Matrix nicht diagonalähnlich. Im hermitischen Fall $x = y$ findet man sogar schon kubische Konvergenz, falls $w \neq z$. Mit $w = z$ und $x = y$ hat die Matrix die beiden Eigenwerte $z + x$ und $z - x$, der Rayleighshift führt dann also zu keiner Verbesserung. (Beide Eigenwerte sind vom Shift gleich weit entfernt.) Mit dem Wilkinsonshift erhält man natürlich direkt die Diagonalisierung.

Ü 16 Zeigen Sie: Ist A obere Hessenbergmatrix und B invertierbare obere Dreiecksmatrix, dann gilt:

1. AB^{-1} ist obere Hessenbergmatrix.
2. Die Elemente (2,1) von $AB^{-1} - \mu I$ und von $A - \mu B$ werden durch die gleiche Ähnlichkeitstransformation mit einer Givensmatrix in null überführt.

1. *Sei $S = R^{-1}$ und $C = AS$. Da die Inverse einer oberen Dreiecksmatrix wieder eine obere Dreiecksmatrx ist, folgt mit*

$$c_{i,j} \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} s_{k,j}$$

und

$$a_{i,k} \;=\; 0 \text{ für } k \;<\; i-1 \quad \text{und} \quad s_{k,j} \;=\; 0 \text{ für } k \;>\; j$$

dass

$$c_{i,j} \;=\; \sum_{k=i-1}^{j} a_{i,k}s_{k,j} \;=\; 0 \text{ für } j \;<\; i-1$$

2. *Sei nun*

$$C \;=\; AB^{-1} - \mu I \;.$$

Die Überführung von $c_{2,1}$ in Null durch eine Givensreflektion an den Zeilen und Spalten 1 und 2 von C wird geleistet durch die Matrix

$$\Omega \;=\; \rho \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} \\ c_{2,1} & -c_{1,1} \end{pmatrix} \text{ mit } \rho \;=\; \frac{1}{\sqrt{c_{1,1}^2 + c_{2,1}^2}} \;.$$

Nun gilt

$$c_{1,1} \;=\; \frac{a_{1,1}}{b_{1,1}} - \mu \text{ und } c_{2,1} \;=\; \frac{a_{2,1}}{b_{1,1}} \;.$$

Die entsprechende Tranformation für $A - \mu B$ lautet

$$\begin{aligned} \Omega_1 \;&=\; \rho_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} - \mu b_{1,1} & a_{2,1} - \mu b2,1 \\ a_{2,1} - \mu b2,1 & \mu b_{1,1} - a_{1,1} \end{pmatrix} \\ \rho_1 \;&=\; \frac{1}{\sqrt{(a_{1,1} - \mu b_{1,1})^2 + (a_{2,1} - \mu b_{2,1})^2}} \end{aligned}$$

Wegen $b_{2,1} \;=\; 0$ liefert Multiplikation der Elemente $c_{1,1}$ und $c_{2,1}$ mit $b_{1,1}$, die sich in der Defintion von Ω wieder heraushebt, gerade die Daten zur Berechnung von Ω_1

Bem.: Diese Tatsache macht man sich im `QZ`*-Algorithmus zu nutze. Das ist im Prinzip das* `QR`*-Verfahren für C, aber ausgeführt an den Originaldaten A, B.*

Ü 17 (*Transformation eines nichtlinearen Eigenwertproblems*)

Gegeben sei das quadratische Eigenwertproblem

$$\left(A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0\right) x = 0,$$

mit regulärer Matrix A_2.

a) Transformieren Sie dieses polynomiale Problem in ein gewöhnliches lineares Eigenwertproblem doppelter Dimension

$$C\tilde{x} = \lambda\tilde{x}.$$

Hinweis: Eliminieren Sie zunächst den Matrixkoeffizienten vor λ^2 und setzen Sie dann den neuen Eigenvektor an als $\tilde{x} = (\lambda x, x)^T$. Wie lautet die Matrix C ?

b) Wie würde die Transformation bei einem allgemeinen polynomialen Eigenwertproblem

$$(p(\lambda))\,x = \left(\sum_{i=0}^{m} A_i \lambda^i\right) x = 0$$

(A_m regulär) aussehen ?

a) *Nach dem Multiplizieren mit A_2^{-1} lautet das Eigenwertproblem*

$$\lambda^2 x + A_2^{-1} A_1 (\lambda x) + A_2^{-1} A_0 x = 0.$$

Dies läst sich umschreiben in

$$\lambda^2 x = -A_2^{-1} A_1 (\lambda x) - A_2^{-1} A_0 x.$$

Auf der rechten Seite der Gleichung steht das Matrix-Vektor-Produkt

$$\left(-A_2^{-1} A_1, -A_2^{-1} A_0\right) \tilde{x}$$

und links haben wir die erste Komponente von $\tilde{x}$ multipliziert mit λ. Um daraus ein gewöhnliches Eigenwertproblem mit quadratischer Matrix zu machen müßte also die zweite Komponente von $\lambda\tilde{x}$ auf der rechten Seite ergänzt werden. $(\lambda\tilde{x})_2$ ist aber gerade λx, also die erste Komponente von $\tilde{x}$. Die Matrix C lautet deshalb

$$C = \begin{pmatrix} -A_2^{-1} A_1 & -A_2^{-1} A_0 \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

und das in λ lineare Eigenwertproblem

$$\begin{pmatrix} -A_2^{-1} A_1 & -A_2^{-1} A_0 \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

Es gilt automatisch $y = \lambda x$.

b) *Im Falle eines allgemeinen Polynoms wäre*

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \lambda^{m-1} x \\ \lambda^{m-2} x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}$$

und die Matrix C lautet

$$C = \begin{pmatrix} -A_m^{-1} A_{m-1} & -A_m^{-1} A_{m-2} & \cdots & & \cdots & -A_m^{-1} A_0 \\ I & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & I & 0 & \cdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I & 0 \end{pmatrix}.$$

Hausübung

H 16 Zeigen Sie: Sind A und B beliebige reelle $n \times n$ Matrizen, dann existieren (komplex) unitäre Matrizen Q und Z mit

$$Q^H AZ = R_A \quad \text{und} \quad Q^H BZ = R_B$$

wobei R_A und R_B obere Dreiecksmatrizen sind. Wie stellt sich damit die Lösung des allgemeinen Eigenwertproblems

$$Ax = \lambda Bx$$

dar? Warum muss man u.U. Q und Z komplex wählen, auch wenn A und B reell sind? (Die Aussage gilt natürlich auch für komplexe A, B)
Hinweis: Approximieren Sie B durch eine Folge invertierbarer Matrizen B_k. Benutzen Sie die Existenz der `QR`-Zerlegung und der Schur-Normalform für beliebige Matrizen.

$$Ax = \lambda B_k x \Leftrightarrow AB_k^{-1} y = \lambda y \quad \text{mit } y = B_k x$$

Nach dem Satz von Schur gilt

$$\exists\, Q_k \text{ unitär } : Q_k^H AB_k^{-1} Q_k = R_k \text{ obere Dreiecksmatrix}$$

Aber für beliebiges unitäres Z_k gilt

$$Q_k^H AB_k^{-1} Q_k = Q_k^H AZ_k Z_k^H B_k^{-1} Q_k \ .$$

Wähle nun Z_k so, daß

$$Z_k^H B_k^{-1} Q_k = R_{B_k} \text{ obere Dreiecksmatrix.}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} Q_k^H AZ_k &= R_k R_{B_k}^{-1} \text{ obere Dreiecksmatrix und} \\ Q_k^H B_k Z_k &= R_{B_k}^{-1} \text{ obere Dreiecksmatrix.} \end{aligned}$$

Als Folgen unitärer Matrizen haben $\{Q_k\}$ und $\{Z_k\}$ Häufungswerte Q und Z und B_k hat den Grenzwert B. Also existieren auch Häufungswerte für die rechts stehenden Dreiecksmatrizen(-produkte) und damit die Behauptung. Weil AB_k^{-1} komplexe Eigenwerte haben kann, ist auch die Schurnormalform komplex zu verstehen, also werden die Matrizen Q und Z u.U. komplex unitär sein. Das allgemeine Eigenwertproblem wird dann zu

$$R_A y = \lambda R_B y \ , \ y \neq 0$$

Gilt nun $(R_B)_{i,i} \neq 0$, dann ist offenbar $\frac{(R_A)_{i,i}}{(R_B)_{i,i}}$ ein Eigenwert, im Falle $(R_B)_{i,i} = 0$ und $(R_A)_{i,i} \neq 0$ fehlt ein Eigenwert, während im Falle $(R_B)_{i,i} = 0 = (R_A)_{i,i}$ jeder beliebige komplexe Wert Eigenwert ist.

H 17 Formulieren Sie das Wielandt-Verfahren mit Shift zur Bestimmung eines Eigenvektors eines allgemeinen Eigenwertproblems

$$Ax = \lambda Bx$$

mit reell symmetrischem A und reell symmetrischem positiv definitem B. Es soll dabei weder die Inverse von B noch die Cholesky-Zerlegung von B benutzt werden. Es tritt auch hier die Aufgabe einer mehrfachen Gleichungslösung mit einer festen Matrix auf, wenn der Shift festgehalten wird. Welches Problem entsteht bei dieser Gleichungslösung? Könnte man das Problem durch eine unitäre Vortransformation a la Tridiagonalisierung vereinfachen?
Hinweis: Arbeiten Sie zunächst formal mit der Choleskyzerlegung von B (Transformation auf ein Standard-Eigenwertproblem) und übersetzen Sie dann in die Originaldaten zurück.

Sei

$$B = LL^T \quad \text{Cholesky}$$

Dann ist

$$Ax = \lambda Bx \Leftrightarrow L^{-1}AL^{-T}L^Tx = \lambda L^Tx = Cy = \lambda y$$

mit

$$C = L^{-1}AL^{-T} \quad \text{und} \quad y = L^Tx \ .$$

Das Wielandtverfahren für C lautet

$$(C - \mu I)y^{k+1} = y^k \ .$$

(Die Normierung unterbleibt hier zur Vereinfachung). In den Originaldaten ist das

$$(A - \mu B)x^{(k+1)} = Bx^{(k)} \ .$$

Wenn μ nicht mit einem Eigenwert des Problems übereinstimmt, ist die Matrix dieses Gleichungssystems zwar invertierbar, aber wenn μ im Inneren des Spektrums liegt, ist sie indefinit, sodaß zur Gleichungslösung entweder ein stabiler Algorithmus benutzt werden muss, der die Symmetrie nicht berücksichtigt (z.B. `QR`*-Zerlegung) oder spezielle symmetrische Löser (z.B. Bunch-Parlett). Man kann das Problem auf 5-Bandform bringen, indem man in A und B spaltenweise vorgeht von unten nach oben, mittels Givensreflektoren: Z.B. in B Elemente $(n, 1)$ und $(n-1, 1)$ in null überführen, (und natürlich von rechts entsprechend $(1, n-1)$ und $(1, n)$), diese Transformation auch an A vornimmt, dann in A das Element $(n, 1)$ bzw $(1, n)$, die gleiche Transformation auf B angewendet zerstört die erzeugten Nullen nicht usw. Man erhält dann B tridiagonal und A quindiagonal.*

H 18 Aufgabe aus NUMAWWW: Die "Balkenmatrix" beschreibt die Schwingungen eines an einem Ende fest eingespannten und am anderen Ende momentenfrei gelagerten Balkens ohne äussere Kraft und ohne Berücksichtigung von Reibung. Diese Matrix ist eine symmetrische, positiv definite Fünfbandmatrix mit nur einfachen Eigenwerten, die formelmässig

bekannt sind. Verwenden Sie NUMAWWW/Eigenwertprobleme "QL-Verfahren" und zum Vergleich die Kombination "Bisektion/Wielandt", um alle Eigenwerte und Eigenvektoren im Falle $n = 30$ zu finden. Protokollieren Sie die Schrittzahlen (beim Wielandtverfahren werden pro Vektor 3 Iterationsschritte durchgeführt) und berechnen Sie daraus den Gesamtaufwand an Multiplikationen und Additionen. Bewerten Sie eine Divison mit 3 Multiplikationen und Additionen und eine Quadratwurzel mit 10 Multiplikationen und Additionen. Bedenken Sie, dass beim QL-Verfahren die Givensrotationen jeweils auch auf die volle (durch Akkumulation aller Transformationen entstehende) $n \times n$ Matrix U anzuwenden sind. Da in beiden Fällen die gleiche Vortransformation auf Tridiagonalgestalt vorzunehmen ist, lassen Sie diese unberücksichtigt. Bedenken Sie aber, dass bei der Variante "Bisektion/Wielandt" die gefundenen Eigenvektoren noch mit der Transformationsmatrix zurücktransformiert werden müssen, während im QL-Fall einfach weiter in die vorliegende Transformationsmatrix hineinmultipliziert wird.
Bem.: Das QL-Verfahren ist eine einfache Variante des besprochenen QR-Verfahrens mit Wilkinsonshift. Diese Variante besteht darin, dass es, auf eine untere Hessenbergform und die entsprechende Zerlegung

$$A = LQ \quad \text{mit} \quad L \quad \text{untere Dreiecksmatrix}$$

angewandt wird, d.h. jetzt soll das Element $a_{1,2}$ gegen null gehen. Im reell symmetrischen Fall ist natürlich $a_{1,2} = a_{2,1}$

Beide Verfahren haben keinerlei Schwierigkeiten mit diesem Test. Das `QL`*-Verfahren liefert in den Eigenwerten einen maximalen absoluten Fehler von* $1.2 \cdot 10^{-13}$ *bei* λ_{24}*, also dort, bei den grossen Eigenwerten, einen relativen Fehler von weniger als* 10^{-15}*, beim kleinsten Eigenwert einen absoluten Fehler von* $8 \cdot 10^{-16}$*, also einen dort einen relativen Fehler von* $8 \cdot 10^{-12}$*. Es ist typisch, dass die kleinen Eigenwerte mit geringerer relativer Genauigkeit erscheinen, obwohl die implizite Shifttechnik benutzt wird. Die Eigenvektormatrix weicht in der Frobeniusnorm nur um* $1.25 \cdot 10^{-14}$ *von der exakten Orthonormalität ab, was bei einer Akkumulation von 2144 Givensreflektoren (einschliesslich der bei der Transformation auf Tridiagonalgestalt benötigten) und einer Rechengenauigkeit von* $2.2 \cdot 10^{-16}$ *sehr günstig ist.*

Bezüglich der erreichten Genauigkeit unterscheidet sich die Kombination "Bisektion/inverse Iteration" nicht vom `QL`*-Verfahren: Sowohl in den absoluten wie den relativen Fehlern ist die Genauigkeit in den Eigenwerten ebenbürtig. Die inverse Iteration erzeugt jedoch Eigenvektoren mit verschlechterter Orthogonalität, mit* $||Z' * Z - I||_F = 2.15 \cdot 10^{-11}$*, wenn man nicht nachorthogonalisiert und* $||Z' * Z - I||_F = 2.27 \cdot 10^{-12}$ *mit Nachorthogonalisierung.*

Bezüglich des Aufwandes ergeben sich deutliche Unterschiede: Im Folgenden steht M *für Multiplikation und* A *für Addition. Wir wenden die Umrechnungsregeln für die Division und die Wurzelberechnung an. (Diese kommen daher, dass beide Operationen durch Iteration nach dem Newtonverfahren mit einem sehr gutem Startwert ausgeführt werden).*

3 Bisektion/Inverse Iteration

Wir gehen davon aus, dass die Werte $|\beta_i|^2$ einmal im voraus berechnet werden. Dann benötigt eine Auswertung der `LR`*-Zerlegung*

$$(n-1)[5A+3M]+1A$$

Es werden im wesentlichen 50 Bisektionsschritte pro Eigenwert benötigt, für die letzten Eigenwerte etwas weniger, weil nun die Ausgangsintervalle kürzer werden. Insgesamt haben wir 1350 Bisektionsauswertungen, also

$$29 \cdot 1350 \cdot 5 = 195750M \text{ und } 29 \cdot 1350 \cdot 3 + 1350 = 117800A$$

Für die inverse Iteration mit 3 Schritten benötigen wir wegen des Startvektors e_n eine `LR`*-Zerlegung mit Pivotisierung und 3 Rücksubstitutionen und 2 Vorwärtseliminationen. Da die Vorwärtselimination den gleichen Aufwand besitzt wie die* `LR`*-Zerlegung selbst, wobei wir den Aufwand für eventuellen Zeilentausch vernachlässigen, haben wir pro Eigenvektor*

$$3(1A+(n-1)(5A+3M)+3A+3M+(n-1)(4M+4A))$$

bei n Eigenvektoren und $n=30$ also

$$30 \cdot (4A+3M+29 \cdot (9A+7M)) = 23610A+18630M$$

Schliesslich muss noch mit der explizit vorliegenden Transformationsmatrix aus der Transformation auf Tridiagonalgestalt multipliziert werden, was bei n^3 M und $n^2(n-1)$ A

$$27000Mund26100A$$

ergibt. Im also insgesamt

$$241380M \text{ und } 167510A$$

Man beachte, dass hier der Hauptaufwand in der Eigenwertbestimmung besteht.

4 `QL`-Verfahren

Hier beruht der Aufwand ausschliesslich in der Berechnung und Anwendung der Givensreflektoren. Um die beiden Werte c und s zu berechnen, benötigt man nach der Umrechnungsvorgabe

$$17A \text{ und } 18M$$

(In Wahrheit ist der Aufwand noch grösser, weil man z.B. die Wurzelberechnung als

$$|a|\sqrt{1+(b/a)^2} \text{ bzw. } |b|\sqrt{1+(a/b)^2}$$

also z.B.

$$c = \frac{sign(a)}{\sqrt{1+|b/a|^2}} \quad s = \frac{sign(b)|b/a|}{\sqrt{1+|b/a|^2}}$$

ausführt, je nachdem, welcher Wert von a, b der betragsgrössere ist.) Da mit jedem gefundenen Eigenwert die Dimension sich verkleinert, haben wir

$$28 \cdot 5 + 3 \cdot \sum_{i=3}^{29} (i-2) = 1274$$

solche Givensreflektoren zu berechnen und von links und rechts auf die Tridiagonalmatrix anzuwenden sowie von rechts auf die akkumulierte Matrix Q aus der Transformation auf Tridiagonalgestalt. Die Anwendung auf zwei Zeilen oder Spalten in der Tridiagonalmatrix erfordert $8M + 4A$, da ein Resultat von vorneherein bekannt ist durch die gezielte Erzeugung einer 0. Also erfordert dies

$$1274 \cdot (17A + 18M) + 28 \cdot (16M + 8A) + 3 \cdot (16M + 8A) \cdot \sum_{i=1}^{26} i$$

d.h.

$$40228M + 30306A$$

also wesentlich weniger als die Bisektion. Zur Berechnung der Eigenvektormatrix muss man aber alle 1274 Givensreflektoren auf ein Paar $n-$reihiger Spalten anwenden und dies erfordert

$$1274 \cdot 30 \cdot (4M + 2A) \;=\; 152880M + 76440A \;.$$

Insgesamt also

$$193108M \textit{ und } 106746A$$

Dies ist deutlich günstiger. Bem.: An den Resultaten erkennt man, dass ein etwas abgeschwächtes Konvergenzkriterium die Situation für das QL-Verfahren noch verbessern würde. Bei höherer Dimension und Notwendigkeit der Nachorthogonalisierung bei der inversen Iteration würde sich das Bild noch mehr verschieben. Man beachte allerdings, dass das QL-Verfahren bei jeder Anwendung eines Givensreflektors Zugriff auf die entstehende Eigenvektormatrix benötigt, und wenn diese nicht mehr in den Cache-Speicher passt, grosse Zeitverluste durch die Speicherzugriffe entstehen können.