Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Sommersemester 2009

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

25.5.2009

Numerische Lineare Algebra
Übung 6

Präsenzübung

Ü 15 Sei

$$H = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$$

reell und $M = Q^T HQ$ die aus einem QR-Schritt mit dem Shift z hervorgegangene Matrix. Zeigen Sie:

$$|m_{21}| = \frac{|y^2 x|}{|w-z|^2 + |y|^2}$$

Was bedeutet dies im Falle $x = y$? Was würde passieren, wenn man den Wilkinsonshift anwenden würde?

Ü 16 Zeigen Sie: Ist A obere Hessenbergmatrix und B invertierbare obere Dreiecksmatrix, dann gilt:

1. AB^{-1} ist obere Hessenbergmatrix.
2. Die Elemente (2,1) von $AB^{-1} - \mu I$ und von $A - \mu B$ werden durch die gleiche Ähnlichkeitstransformation mit einer Givensmatrix in null überführt.

Ü 17 (*Transformation eines nichtlinearen Eigenwertproblems*)
Gegeben sei das quadratische Eigenwertproblem

$$\left(A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0\right) x = 0,$$

mit regulärer Matrix A_2.

a) Transformieren Sie dieses polynomiale Problem in ein gewöhnliches lineares Eigenwertproblem doppelter Dimension

$$C\tilde{x} = \lambda\tilde{x}.$$

Hinweis: Eliminieren Sie zunächst den Matrixkoeffizienten vor λ^2 und setzen Sie dann den neuen Eigenvektor an als $\tilde{x} = (\lambda x, x)^T$. Wie lautet die Matrix C ?

b) Wie würde die Transformation bei einem allgemeinen polynomialen Eigenwertproblem

$$(p(\lambda))\, x = \left(\sum_{i=0}^{m} A_i \lambda^i\right) x = 0$$

(A_m regulär) aussehen ?

Hausübung

H 16 Zeigen Sie: Sind A und B beliebige reelle $n \times n$ Matrizen, dann existieren (komplex) unitäre Matrizen Q und Z mit

$$Q^H AZ \;=\; R_A \quad \text{und} \quad Q^H BZ \;=\; R_B$$

wobei R_A und R_B obere Dreiecksmatrizen sind. Wie stellt sich damit die Lösung des allgemeinen Eigenwertproblems

$$Ax \;=\; \lambda Bx$$

dar? Warum muss man u.U. Q und Z komplex wählen, auch wenn A und B reell sind? (Die Aussage gilt natürlich auch für komplexe A, B)
Hinweis: Approximieren Sie B durch eine Folge invertierbarer Matrizen B_k. Benutzen Sie die Existenz der `QR`-Zerlegung und der Schur-Normalform für beliebige Matrizen.

H 17 Formulieren Sie das Wielandt-Verfahren mit Shift zur Bestimmung eines Eigenvektors eines allgemeinen Eigenwertproblems

$$Ax \;=\; \lambda Bx$$

mit reell symmetrischem A und reell symmetrischem positiv definitem B. Es soll dabei weder die Inverse von B noch die Cholesky-Zerlegung von B benutzt werden. Es tritt auch hier die Aufgabe einer mehrfachen Gleichungslösung mit einer festen Matrix auf, wenn der Shift festgehalten wird. Welches Problem entsteht bei dieser Gleichungslösung? Könnte man das Problem durch eine unitäre Vortransformation a la Tridiagonalisierung vereinfachen?
Hinweis: Arbeiten Sie zunächst formal mit der Choleskyzerlegung von B (Transformation auf ein Standard-Eigenwertproblem) und übersetzen Sie dann in die Originaldaten zurück.

H 18 Aufgabe aus NUMAWWW: Die "Balkenmatrix" beschreibt die Schwingungen eines an einem Ende fest eingespannten und am anderen Ende momentenfrei gelagerten Balkens ohne äussere Kraft und ohne Berücksichtigung von Reibung. Diese Matrix ist eine symmetrische, positiv definite Fünfbandmatrix mit nur einfachen Eigenwerten, die formelmässig bekannt sind. Verwenden Sie NUMAWWW/Eigenwertprobleme "QL-Verfahren" und zum Vergleich die Kombination "Bisektion/Wielandt", um alle Eigenwerte und Eigenvektoren im Falle $n = 30$ zu finden. Protokollieren Sie die Schrittzahlen (beim Wielandtverfahren werden pro Vektor 3 Iterationsschritte durchgeführt) und berechnen Sie daraus den Gesamtaufwand an Multiplikationen und Additionen. Bewerten Sie eine Divison mit 3 Multiplikationen und Additionen und eine Quadratwurzel mit 10 Multiplikationen und Additionen. Bedenken Sie, dass beim QL-Verfahren die Givensrotationen jeweils auch auf die volle (durch Akkumulation aller Transformationen entstehende) $n \times n$ Matrix U anzuwenden sind. Da in beiden Fällen die gleiche Vortransformation auf Tridiagonalgestalt vorzunehmen ist, lassen Sie diese unberücksichtigt. Bedenken Sie aber, dass bei der Variante "Bisektion/Wielandt" die gefundenen Eigenvektoren noch mit der Transformationsmatrix zurücktransformiert werden müssen, während im QL-Fall einfach weiter in die vorliegende Transformationsmatrix hineinmultipliziert wird.

Bem.: Das QL-Verfahren ist eine einfache Variante des besprochenen QR-Verfahrens mit Wilkinsonshift. Diese Variante besteht darin, dass es, auf eine untere Hessenbergform und die entsprechende Zerlegung

$$A = LQ \quad \text{mit} \quad L \quad \text{untere Dreiecksmatrix}$$

angewandt wird, d.h. jetzt soll das Element $a_{1,2}$ gegen null gehen. Im reell symmetrischen Fall ist natürlich $a_{1,2} = a_{2,1}$