Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Sommersemester 2009

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

18.5.2009

Numerische Lineare Algebra
Übung 5

Präsenzübung

Ü 12 Berechnen Sie den ersten Schritt der Ähnlichkeitstransformation auf SCHURsche Normalform für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

und bestimmen Sie die beiden übrigen Eigenwerte.
Hinweis: Ein Eigenvektor von A ist $(1, 2, 2)^T$.

Ü 13 Führen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit dem Shift $\mu = 1$ durch.

Ü 14 Zeigen Sie:

a) Die Schur-Normalform einer hermitischen Matrix ist diagonal.

b) Ist A eine obere Dreiecksmatrix und zugleich unitär, dann ist A diagonal mit Diagonalelementen vom Betrag 1.

Hausübung

H 13 Führen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 0 \\ 4 & 12 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

mit dem Shift $\mu = 10$ durch und bestimmen Sie eine neue Schätzung für den Eigenwert aus dem letzten Diagonalelement. (Zum Vergleich: $\lambda_2 \approx 8.8432$).

H 14 Sei A eine diagonalisierbare, nichtzerfallende reguläre obere $n \times n$ Hessenbergmatrix (d.h. $\alpha_{i,i-1} \neq 0$) mit genau einem betragskleinsten Eigenwert. Seien ferner:

$$A_0 = A, \qquad A_k = Q_k R_k, \qquad A_{k+1} = R_k Q_k,$$

also A_k die iterierten Matrizen des QR Verfahrens mit dem Shift $\mu_k = 0$ für alle k. Zeigen Sie:

$$\lim_{k\to\infty} (\alpha_k)_{nn-1} = 0, \quad \text{mit } A_k = ((\alpha_k)_{ij})$$

in folgenden Schritten:

a) $\tilde{Q}_k = Q_0 \cdots Q_k, \qquad \tilde{R}_k = R_k \cdots R_0 \quad \Rightarrow \quad A_{k+1} = \tilde{Q}_k^H A \tilde{Q}_k.$

b) $A^{k+1} = \tilde{Q}_k \tilde{R}_k.$

c) Es gibt ein ν_k mit $|\nu_k| = 1$, so daß $\nu_k \tilde{Q}_k e_n = B^{k+1} e_n / ||B^{k+1} e_n||_2$ mit $B = A^{-H}$ und $e_n = (0, ..., 0, 1)^T$.

d) B aus c) erfüllt die Voraussetzungen des v.Mises Verfahrens für $x_0 = e_n$.

e) Zeigen Sie mit Hilfe von $e_{n-1}^T A_k^H e_n$ die geforderte Aussage.

Hinweis: Die Schritte a), b) und c) sind Spezialfälle von Satz 1.7.3 aus der Vorlesung und d) folgt analog H09. Um e) zu zeigen, genügt es, den Zusammenhang zwischen c) und Satz 1.5.1 herzustellen.

H 15 Zeigen Sie: Sind Q und V beide unitär und sind sowohl

$$Q^H A Q \stackrel{def}{=} H \quad \text{und} \quad V^H A V \stackrel{def}{=} G$$

obere Hessenbergmatrizen, und ist $Qe_1 = Ve_1$, dann gilt folgendes: Sei k der kleinste Index mit

$$h_{k+1,k} = 0 \quad \text{mit } k < n$$

bzw. $k = n$. Dann gilt

$$Qe_i = \theta_i V e_i \quad \text{und} \quad |h_{i,i-1}| = |g_{i,i-1}| \quad \text{für } i = 2, \ldots, k$$

mit $|\theta_i| = 1$. Ist $k < n$, dann ist auch $g_{k+1,k} = 0$.
Hinweis: Zeigen Sie $GW = WH$ mit unitärem W und zeigen Sie, daß W diagonal sein muss. Betrachten Sie dazu die Spalten 1 bis $k-1$ von GW.
Bem.: Dieser Satz wird benötigt, um die implizite Shift-Technik beim QR-Verfahren zu begründen und den konjugiert-komplexen Doppelshift im Reellen ausführen zu können.

Numerische Lineare Algebra
Übung 5, Lösungsvorschlag

Präsenzübung

Ü 12 Berechnen Sie den ersten Schritt der Ähnlichkeitstransformation auf SCHURsche Normalform für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

und bestimmen Sie die beiden übrigen Eigenwerte.
Hinweis: Ein Eigenvektor von A ist $(1,2,2)^T$.

Mit dem gegebenen Eigenvektor $v = (1,2,2)^T$ wird die erste HOUSEHOLDER*-Matrix bestimmt, als*

$$U_1 = I - \beta_1 u_1 u_1^T$$

wobei

$$u_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{sign}(v_1)(|v_1| + \|v\|_2) \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und folglich $\beta_1 = \frac{2}{u_1^T u_1} = \frac{1}{12}$ ist. Es wird natürlich vermieden die Housholdermatrix explizit aufzustellen, vielmehr berechnen wir die Matrix $A_1 = U_1 A U_1$ spaltenweise, bzw. zeilenweise.

Dazu zuerst $\tilde{A}_1 = U_1 A$:

$$u_1^T A = (4,2,2) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = (-12, 12, 12)$$

$$\tilde{A}_1 = A - \beta_1 u_1 u_1^T A = A - \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

und jetzt $A_1 = \tilde{A}_1 U_1$:

$$\tilde{A}_1 u_1 = 0$$
$$\Longrightarrow A_1 = \tilde{A}_1$$

und damit ist drei der Eigenwert zum angegebenen Eigenvektor.
Die rechte untere 2×2-Matrix besitzt als Eigenwerte die beiden übrigen Eigenwerte von A. Mit der Zeilensumme konstant 0 und der Spur 6 sind dies offenbar 0. Mit dem Eigenvektor $(1,1)^T$ dieser Submatrix könnte man die Transformation nun vollenden.

Ü 13 Führen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit dem Shift $\mu = 1$ durch.

Die Matrix $A - \mu I$ lautet

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Von dieser Matrix muß eine QR-Zerlegung berechnet werden. Der erste Schritt der Householder–Transformation mit dem Vektor:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A}_1 = U_1 \widetilde{A} = \widetilde{A} - 2\frac{u_1 {u_1}^T}{{u_1}^T u_1} \widetilde{A} = \widetilde{A} - \frac{2}{2} u_1 (1,0,1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Der zweite QR-Schritt mit dem Vektor u_2

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R = U_2 \widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_1 - 2\frac{u_2 {u_2}^T}{{u_2}^T u_2} \widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_1 - \frac{2}{4 + 2\sqrt{2}} u_2 (0, 2+\sqrt{2}, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Um aus dieser Zerlegung eine Ähnlichkeitstransformation zu machen, müssen die Householdermatrizen U_1 und U_2 von rechts an R multipliziert und um $-\mu$ geshiftet werden

$$A_1 = RQ + \mu I = RU_1U_2 + \mu I.$$

$$R_1 = RU_1 = R - \frac{2}{u_1^T u_1} R u_1 u_1^T = R - \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} u_1^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = R_1 U_2 = R_1 - \frac{2}{u_2^T u_2} R_1 u_2 u_2^T = R_1 - \frac{1}{2+\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2-\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_2^T = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Folglich ist

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ein Eigenwert lautet also 1.

Ü 14 Zeigen Sie:

a) Die Schur-Normalform einer hermitischen Matrix ist diagonal.

b) Ist A eine obere Dreiecksmatrix und zugleich unitär, dann ist A diagonal mit Diagonalelementen vom Betrag 1.

a) *Nach Annahme ist*

$$R \;=\; Q^H A Q \;=\; Q^H A^H Q \;=\; (Q^H A Q)^H \;=\; R^H \quad (*)$$

und zugleich R obere Dreiecksmatrix. Also müssen wegen

$$r_{i,j} \;=\; \bar{r}_{j,i} \;=\; 0 \text{ für } j \;<\; i$$

nach (*) alle Ausserdiagonalelemente von R null sein.

b) *Wegen*

$$QQ^H \;=\; Q^H Q \;=\; I$$

für jede unitäre Matrix müssen sowohl die Zeilen als auch die Spalten einer unitären Matrix die Länge eins haben. Wir gehen nun induktiv über die Spalten und Zeilen vor: Da A obere Dreiecksmatrix ist und die erste Spalte die Länge eins hat, muss

$$|a_{1,1}| \;=\; 1$$

gelten. Damit die erste Zeile von A nun auch die Länge eins hat, müssen die übrigen Elemente der Zeile eins alle null sein:

$$a_{1,2} \;=\; \ldots \;=\; a_{1,n} \;=\; 0$$

Nun ist das einzige Nichtnullelement in Spalte 2 von A das Diagonalelement $a_{2,2}$ und daher

$$|a_{2,2}| \;=\; 1$$

usw.

Hausübung

H 13 Führen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 0 \\ 4 & 12 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

mit dem Shift $\mu = 10$ durch und bestimmen Sie eine neue Schätzung für den Eigenwert aus dem letzten Diagonalelement. (Zum Vergleich: $\lambda_2 \approx 8.8432$).

Die Matrix $A - \mu I$ lautet

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Von dieser Matrix muß eine QR-Zerlegung berechnet werden. Der erste Schritt der Householder–Transformation mit dem Vektor:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A}_1 = U_1\widetilde{A} = \widetilde{A} - 2\frac{u_1 {u_1}^T}{{u_1}^T u_1}\widetilde{A} = \widetilde{A} - \frac{2}{32} \cdot u_1 \cdot (16, 24, 12) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Der zweite QR-Schritt mit dem Vektor u_2

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$R = U_2\widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_1 - 2\frac{u_2 {u_2}^T}{{u_2}^T u_2}\widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_1 - \frac{2}{81+9} \cdot u_2 \cdot (0, 45, -6) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{5} \end{pmatrix}.$$

Um aus dieser Zerlegung eine Ähnlichkeitstransformation zu machen, müssen die Householdermatrizen U_1 und U_2 von rechts an R multipliziert und um $-\mu I$ geshiftet werden

$$A_1 = RQ + \mu I = RU_1U_2 + \mu I.$$

$$R_1 = RU_1 = R - \frac{2}{u_1^T u_1} R u_1 u_1^T = R - \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -24 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} u_1^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -5 & 0 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{5} \end{pmatrix}.$$

$$R_2 = R_1U_2 = R_1 - \frac{2}{u_2^T u_2} R_1 u_2 u_2^T = R_1 - \frac{1}{45}\begin{pmatrix} -45 \\ -\frac{18}{5} \\ -\frac{24}{5} \end{pmatrix} u_2^T = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -5 & -\frac{18}{25} & -\frac{24}{25} \\ 0 & -\frac{24}{25} & -\frac{32}{25} \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$A_1 = \begin{pmatrix} 12 & -5 & 0 \\ -5 & 9.28 & -0.96 \\ 0 & -0.96 & 8.72 \end{pmatrix}.$$

Die nächste EW-Schätzung ergibt sich also als 8.72*. Bem.: Der Wilkinsonshift hätte hier den Wert 8, wäre also hier noch ungünstiger als der Rayleightshift.*

H 14 Sei A eine diagonalisierbare, nichtzerfallende reguläre obere $n \times n$ Hessenbergmatrix (d.h. $\alpha_{i,i-1} \neq 0$) mit genau einem betragskleinsten Eigenwert. Seien ferner:

$$A_0 = A, \qquad A_k = Q_k R_k, \qquad A_{k+1} = R_k Q_k,$$

also A_k die iterierten Matrizen des QR Verfahrens mit dem Shift $\mu_k = 0$ für alle k. Zeigen Sie:

$$\lim_{k\to\infty} (\alpha_k)_{nn-1} = 0, \quad \text{mit } A_k = ((\alpha_k)_{ij})$$

in folgenden Schritten:

a) $\tilde{Q}_k = Q_0 \cdots Q_k, \qquad \tilde{R}_k = R_k \cdots R_0 \quad \Rightarrow \quad A_{k+1} = \tilde{Q}_k^H A \tilde{Q}_k.$

b) $A^{k+1} = \tilde{Q}_k \tilde{R}_k.$

c) Es gibt ein ν_k mit $|\nu_k| = 1$, so daß $\nu_k \tilde{Q}_k e_n = B^{k+1} e_n / ||B^{k+1} e_n||_2$ mit $B = A^{-H}$ und $e_n = (0, ..., 0, 1)^T$.

d) B aus c) erfüllt die Voraussetzungen des v.Mises Verfahrens für $x_0 = e_n$.

e) Zeigen Sie mit Hilfe von $e_{n-1}^T A_k^H e_n$ die geforderte Aussage.

Hinweis: Die Schritte a), b) und c) sind Spezialfälle von Satz 1.7.3 aus der Vorlesung und d) folgt analog H09. Um e) zu zeigen, genügt es, den Zusammenhang zwischen c) und Satz 1.5.1 herzustellen.

a) $A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^H A_k Q_k = Q_k^H R_{k-1} Q_{k-1} Q_k = ... = \tilde{Q}_k^H A \tilde{Q}_k.$

b) $A^{k+1} = (Q_0 R_0)^{k+1} = Q_0 A_1^k R_0 = Q_0 (Q_1 R_1)^k R_0 = \tilde{Q}_1 A_2^{k-1} \tilde{R}_1 = ... = \tilde{Q}_k \tilde{R}_k.$

c) $A^{k+1} = \tilde{Q}_k \tilde{R}_k \quad \Rightarrow \quad \left(A^{-H}\right)^{k+1} e_n = \tilde{Q}_k \tilde{R}_k^{-H} e_n = \left(\overline{(\rho_k)_{nn}}\right)^{-1} \tilde{Q}_k e_n,$

wobei $\tilde{R}_k = ((\rho_k)_{ij})$ *eine obere nichtsinguläre Dreiecksmatrix ist. Es kann dann*

$$\nu_k = |(\rho_k)_{nn}| / \overline{(\rho_k)_{nn}}$$

gewählt werden.

d) *A diagonalähnlich $\Rightarrow$ B diagonalähnlich.*
Seien $0 < |\lambda_1| < |\lambda_2| \leq ... \leq |\lambda_n|$ die Eigenwerte von A, so gibt es ein Linkseigenvektorsystem $\{v_i\}$ und ein Rechtseigenvektorsystem $\{u_i\}$ von B jeweils bestehend aus linear unabhängigen Vektoren mit $v_i^H u_j = \delta_{ij}$ sowie:

$$v_i^H B = \frac{1}{\bar{\lambda}_i} v_i^H \qquad B u_i = \frac{1}{\bar{\lambda}_i} u_i.$$

Setzen wir $x_0 = \sum_{i=1}^n \xi_i u_i$, *so müssen wir* $\xi_1 \neq 0$ *zeigen. Wegen*

$$v_1^H x_0 = \sum_{i=1}^n \xi_i v_1^H u_i = \xi_1,$$

darf x_0 *nicht auf* v_1 *senkrecht stehen. Sei etwa* $v_1^H e_n = 0$, *dann folgt* $(v_1)_n = 0$. *Weiter gilt:*

$$v_1^H B = \frac{1}{\bar{\lambda}_1} v_1^H \;\Rightarrow\; v_1^H A^{-H} = \frac{1}{\bar{\lambda}_1} v_1^H \;\Rightarrow\; v_1^H A^H = \bar{\lambda}_1 v_1^H,$$

d.h.

$$0 = \bar{\lambda}_1 v_1^H e_n = v_1^H A^H e_n = \overline{(v_1)_{n-1}}\,\overline{\alpha_{nn-1}}.$$

Wegen $\alpha_{nn-1} \neq 0$ *folgt* $(v_1)_{n-1} = 0$. *Durch Induktion erhalten wir schließlich* $v_1 = 0$ *im Widerspruch. (Hier geht die Bedingung 'nichtzerfallend' ein.)*

e) *Die Eigenwerte von* B *sind* $1/\bar{\lambda}_1, ..., 1/\bar{\lambda}_n$ *mit*

$$\frac{1}{|\bar{\lambda}_1|} > \frac{1}{|\bar{\lambda}_2|} \geq ... \geq \frac{1}{|\bar{\lambda}_n|},$$

und die Folge $x_{k+1} = B^{k+1} e_n$ *konvergiert nach Teil d) gegen ein Vielfaches von* u_1 *mit*

$$x_k = \xi_1 \left(\frac{1}{\bar{\lambda}_1}\right)^k \left(u_1 + \mathcal{O}\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^k\right).$$

Mit $\theta_k = (\nu_k||u_1 + \mathcal{O}(|\lambda_1/\lambda_2|^k)||_2)^{-1}$ *und* $||\tilde{Q}_k^H e_{n-1}||_2 = 1$ *erhalten wir mit Hilfe von a) und c)*

$$\begin{aligned} e_{n-1}^T A_{k+1}^H e_n &= e_{n-1}^T \tilde{Q}_k^H A^H \tilde{Q}_k e_n = e_{n-1}^T \tilde{Q}_k^H B^{-1} \theta_k \left(u_1 + \mathcal{O}\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^k\right) \\ &= \theta_k \bar{\lambda}_1 e_{n-1}^T \tilde{Q}_k^H u_1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^k\right). \end{aligned}$$

Weil

$$\theta u_1 = \Theta_k \tilde{Q}_k e_n + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^k\right) \text{ mit } |\Theta_k| = 1$$

ist, konvergiert $e_{n-1}^T A_k^H e_n$ *gegen Null.*

H 15 Zeigen Sie: Sind Q und V beide unitär und sind sowohl

$$Q^H A Q \stackrel{def}{=} H \quad \text{und} \quad V^H A V \stackrel{def}{=} G$$

obere Hessenbergmatrizen, und ist $Qe_1 = Ve_1$, dann gilt folgendes: Sei k der kleinste Index mit

$$h_{k+1,k} = 0 \quad \text{mit } k < n$$

bzw. $k = n$. Dann gilt

$$Qe_i = \theta_i V e_i \quad \text{und} \quad |h_{i,i-1}| = |g_{i,i-1}| \quad \text{für } i = 2, \ldots, k$$

mit $|\theta_i| = 1$. Ist $k < n$, dann ist auch $g_{k+1,k} = 0$.
Hinweis: Zeigen Sie $GW = WH$ mit unitärem W und zeigen Sie, daß W diagonal sein muss. Betrachten Sie dazu die Spalten 1 bis $k-1$ von GW.
Bem.: Dieser Satz wird benötigt, um die implizite Shift-Technik beim QR-Verfahren zu begründen und den konjugiert-komplexen Doppelshift im Reellen ausführen zu können.

Nach Annahme ist

$$A = VGV^H = QHQ^H$$

also

$$G = V^H QHQ^H V$$

also mit $W = V^H Q$

$$GW = WH .$$

Wie üblich bezeichne hier und im Folgenden w_i *die* $i-$*te Spalte von* W, *und analog für* Q *und* V. *Wir betrachten nun die Spalten 1 bis* $k-1$ *von* GW. *Es ist für* $i = 2, \ldots, k$

$$GWe_{i-1} = Gw_{i-1} = \sum_{j=1}^{i} h_{j,i-1} w_j$$

oder

$$h_{i,i-1} w_i = Gw_{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1} h_{j,i-1} w_j .$$

Nach Annahme $q_1 = v_1$ *ist* $w_1 = e_1$ *also hat* w_2 *höchstens die Elemente 1 und 2 ungleich null (da* G *obere Hessenbergmatrix ist) , und entsprechend für* $i = 3$ w_3 *nur die ersten drei Elemente usw., d.h. die Matrix aus den Spalten* $w_1, \ldots, w_k$ *hat obere Dreiecksgestalt. Weil aber* W *unitär ist, sind die* w_i *Einheitsvektoren, multipliziert mit komplexen Zahlen vom Betrag eins, im Reellen also* ± 1. *Wegen*

$$w_j = V^H q_j \quad \text{und} \quad h_{i,i-1} = w_i^H G w_{i-1}$$

ist also

$$v_j = \theta_j q_j \quad \text{mit} \quad |\theta_j| = 1$$

und

$$|h_{i,i-1}| = |q_i^H A q_{i-1}| = |v_i^H A v_{i-1}| = |g_{i,i-1}|$$

Wenn $k < n$ *gilt, dann ist auch noch*

$$\begin{aligned} 0 = h_{k+1,k} &= e_{k+1}^T \sum_{i=1}^{k+1} h_{i,k} e_i \\ &= e_{k+1}^T \sum_{i=1}^{k+1} h_{i,k} e_i \theta_i \\ &= e_{k+1}^T \sum_{i=1}^{k+1} h_{i,k} w_i \;=\; e_{k+1}^T W H e_k \\ &= e_{k+1}^T G W e_k \;=\; e_{k+1}^T G e_k \theta_k \\ &= g_{k+1,k} \theta_k \end{aligned}$$

mit $|\theta_k| = 1$.