Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Sommersemester 2009

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

18.5.2009

Numerische Lineare Algebra
Übung 5

Präsenzübung

Ü 12 Berechnen Sie den ersten Schritt der Ähnlichkeitstransformation auf SCHURsche Normalform für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

und bestimmen Sie die beiden übrigen Eigenwerte.
Hinweis: Ein Eigenvektor von A ist $(1, 2, 2)^T$.

Ü 13 Führen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit dem Shift $\mu = 1$ durch.

Ü 14 Zeigen Sie:

a) Die Schur-Normalform einer hermitischen Matrix ist diagonal.

b) Ist A eine obere Dreiecksmatrix und zugleich unitär, dann ist A diagonal mit Diagonalelementen vom Betrag 1.

Hausübung

H 13 Führen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 0 \\ 4 & 12 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

mit dem Shift $\mu = 10$ durch und bestimmen Sie eine neue Schätzung für den Eigenwert aus dem letzten Diagonalelement. (Zum Vergleich: $\lambda_2 \approx 8.8432$).

H 14 Sei A eine diagonalisierbare, nichtzerfallende reguläre obere $n \times n$ Hessenbergmatrix (d.h. $\alpha_{i,i-1} \neq 0$) mit genau einem betragskleinsten Eigenwert. Seien ferner:

$$A_0 = A, \qquad A_k = Q_k R_k, \qquad A_{k+1} = R_k Q_k,$$

also A_k die iterierten Matrizen des QR Verfahrens mit dem Shift $\mu_k = 0$ für alle k. Zeigen Sie:

$$\lim_{k\to\infty} (\alpha_k)_{nn-1} = 0, \quad \text{mit } A_k = ((\alpha_k)_{ij})$$

in folgenden Schritten:

a) $\tilde{Q}_k = Q_0 \cdots Q_k, \qquad \tilde{R}_k = R_k \cdots R_0 \quad \Rightarrow \quad A_{k+1} = \tilde{Q}_k^H A \tilde{Q}_k$.

b) $A^{k+1} = \tilde{Q}_k \tilde{R}_k$.

c) Es gibt ein ν_k mit $|\nu_k| = 1$, so daß $\nu_k \tilde{Q}_k e_n = B^{k+1} e_n / ||B^{k+1} e_n||_2$ mit $B = A^{-H}$ und $e_n = (0, ..., 0, 1)^T$.

d) B aus c) erfüllt die Voraussetzungen des v.Mises Verfahrens für $x_0 = e_n$.

e) Zeigen Sie mit Hilfe von $e_{n-1}^T A_k^H e_n$ die geforderte Aussage.

Hinweis: Die Schritte a), b) und c) sind Spezialfälle von Satz 1.7.3 aus der Vorlesung und d) folgt analog H09. Um e) zu zeigen, genügt es, den Zusammenhang zwischen c) und Satz 1.5.1 herzustellen.

H 15 Zeigen Sie: Sind Q und V beide unitär und sind sowohl

$$Q^H A Q \stackrel{def}{=} H \quad \text{und} \quad V^H A V \stackrel{def}{=} G$$

obere Hessenbergmatrizen, und ist $Qe_1 = Ve_1$, dann gilt folgendes: Sei k der kleinste Index mit

$$h_{k+1,k} = 0 \quad \text{mit } k < n$$

bzw. $k = n$. Dann gilt

$$Qe_i = \theta_i V e_i \quad \text{und} \quad |h_{i,i-1}| = |g_{i,i-1}| \quad \text{für } i = 2, \ldots, k$$

mit $|\theta_i| = 1$. Ist $k < n$, dann ist auch $g_{k+1,k} = 0$.
Hinweis: Zeigen Sie $GW = WH$ mit unitärem W und zeigen Sie, daß W diagonal sein muss. Betrachten Sie dazu die Spalten 1 bis $k-1$ von GW.
Bem.: Dieser Satz wird benötigt, um die implizite Shift-Technik beim QR-Verfahren zu begründen und den konjugiert-komplexen Doppelshift im Reellen ausführen zu können.