Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Sommersemseter 2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

11.5.2009

Numerische Lineare Algebra
Übung 4

Präsenzübung

Ü 9 Es sei H eine nichtzerfallende obere Hessenbergmatrix und

$$H = QR$$

eine durch Anwendung von Givensreflektoren von links auf H erzeugte `QR`-Zerlegung, d.h. Q ist unitär und R eine obere Dreiecksmatrix. Zeigen Sie

1. Es gilt
$$|r_{i,i}| \geq |h_{i+1,i}| > 0 \ , \ i = 1, \ldots, n-1 \ .$$
2. Q ist eine obere Hessenbergmatrix.
3. RQ ist eine obere Hessenbergmatrix und ähnlich zu H.

Hinweis: Beachten Sie, in welcher Reihenfolge Q aus den einzelnen Givensreflektoren zusammenmultipliziert wird. Q steht in dieser Formel auf der rechten Seite!

Ü 10 Bestimmen Sie die vollständige Struktur des Eigensystems einer Rang–1–Matrix

$$A = uv^H \neq O \ .$$

Wie verhält sich eine Vektorfolge

$$A^k x_0$$

mit beliebigem $x_0 \neq 0$?
Hinweis: entwickeln Sie x_0 nach v und dem Orthogonalraum zu v.

Ü 11 Gegeben sei die Matrix

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Führen Sie zwei Schritte des v. Mises-Verfahrens (mit Normierung) mit Startvektor $\vec{x}^{(0)} = (0.1, -0.7, -0.7, 0.1)^T$ durch.

b) Folgern Sie aus a), daß für alle $k \in \{1, 2, \ldots\}$ gilt:

$$\varrho_k = 0.14 \quad , \quad \vec{x}^{(k)} = \begin{cases} \vec{x}^{(0)} \, , & \text{falls } k \text{ gerade} \\ (0.7, -0.1, -0.1, 0.7)^T \, , & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases} \ .$$

c) Was bedeutet das Resultat aus b?. Versuchen Sie eine Erklärung zu finden. Tips: Rang(A)=?, spur(A)=? , $A\ (1,1,1,1)^T\ = ?$.

Hausübung

H 10 Gegeben sei die hermitische Matrix

$$A \;=\; \begin{pmatrix} -9 & * & * & * & * \\ * & -2 & * & * & * \\ * & * & 1 & * & * \\ * & * & * & 4 & * \\ * & * & * & * & 21 \end{pmatrix}$$

deren Außerdiagonalelemente betragsmäßig $\leq 1/4$ seien. Zeigen Sie:

a) Die Matrix A besitzt genau einen betragsgrößten einfachen Eigenwert λ_1.

b) Der Einheitsvektor e_5 steht nicht senkrecht auf dem Eigenvektor u_1 von λ_1.
Hinweis: ON-System der Eigenvektoren betrachten.

c) Die einfache Vektoriteration

$$\tilde{x}_{k+1} := Ax_k \qquad x_{k+1} := \frac{\tilde{x}_{k+1}}{||\tilde{x}_{k+1}||}$$

mit $x_0 = e_5$ konvergiert gegen u_1.

d) Schätzen Sie überschlagsmäßig den Fehler $R(x_5; A) - \lambda_1$ ab.

H 11 Gegeben sei

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{(„ Jordan–Kästchen ") mit } \lambda \neq 0$$

Zeigen Sie, daß die Vektorfolge

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= Jx_k \\ x_{k+1} &= \frac{\tilde{x}_{k+1}}{|\tilde{\xi}_{1,k+1}|} \end{aligned}$$

mit $\tilde{x}_{k+1} = (\tilde{\xi}_{1,k+1}, ..., \tilde{\xi}_{n,k+1})^T$ (direkte Iteration mit Normierung der ersten Komponente) und $x_0 = (1, ..., 1)^T$ als Startvektor gegen einen (welchen ?) Eigenvektor x von J konvergiert und schätzen Sie die Fehlerreduktion

$$\frac{\|x_{k+1} - x\|_\infty}{\|x_k - x\|_\infty}$$

größenordnungsmäßig.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß

$$
\begin{aligned}
J^k &= \sum_{\nu=0}^{\min\{n-1,k\}} \lambda^{k-\nu} \binom{k}{\nu} T_\nu \qquad \text{mit} \qquad T_\nu = \left(\tau_{ij}^{(\nu)}\right), \\
\tau_{ij}^{(\nu)} &= \begin{cases} 1\,, & j = i + \nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

H 12 Sei A eine diagonalähnliche komplexe Matrix mit genau einem einfachen betragsdominanten Eigenwert λ_1. Betrachten Sie folgende Variante der direkten Iteration von v. Mises:

1. Wähle x_0 und $y_0 \in \mathbb{C}^n$ geeignet.
2. Für $k = 0, \ldots,$ setze

$$
\begin{aligned}
y_{k+1}^H &= y_k^H A \\
x_{k+1} &= A x_k \,.
\end{aligned}
$$

Zeigen Sie, daß dann

$$
\left| \frac{y_k^H A x_k}{y_k^H x_k} - \lambda_1 \right| = \mathcal{O}(\ (|\lambda_2/\lambda_1|)^{2k})
$$

gilt. Wie präzisiert man "geeignet gewählt"?

Numerische Lineare Algebra
Übung 4, Lösungsvorschlag

Präsenzübung

Ü 9 Es sei H eine nichtzerfallende obere Hessenbergmatrix und

$$H = QR$$

eine durch Anwendung von Givensreflektoren von links auf H erzeugte `QR`-Zerlegung, d.h. Q ist unitär und R eine obere Dreiecksmatrix. Zeigen Sie

1. Es gilt
$$|r_{i,i}| \geq |h_{i+1,i}| > 0 \ , \ i = 1, \dots, n-1 \ .$$
2. Q ist eine obere Hessenbergmatrix.
3. RQ ist eine obere Hessenbergmatrix und ähnlich zu H.

Hinweis: Beachten Sie, in welcher Reihenfolge Q aus den einzelnen Givensreflektoren zusammenmultipliziert wird. Q steht in dieser Formel auf der rechten Seite!

1. *Es werden $n-1$ Givensreflektoren Ω_i von links angewendet, die dazu dienen, das Element $(i+1, i)$ von H in null zu überführen. Diese Reflektoren tangieren nur die Zeilen i und $i+1$ und ändern daher die darunter liegenden Zeilen und damit die Nebendiagonalelemente von H in den Zeilen $i+2$ folgende nicht. Weil jeder Givensreflektor unitär ist, gilt somit die erste Behauptung.*
2. *Nach der Überlegung unter 1. ist*
$$Q = \Omega_1 \cdots \Omega_{n-1}$$
Um die Struktur dieses Produktes zu ermitteln, beginnen wir mit Ω_1 und multiplizieren nun dies von rechts mit Ω_2. Dies betrifft also Spalte 2 und 3 von Ω_1. Weil diese Spalten unterhalb des Elementes 3 null sind, wird nur ein Element ungleich null in der Position (3,2) eingeführt, die Elemente oberhalb der Diagonale interessieren uns nicht, sie werden natürlich mit jeder weiteren Reflektion aufgefüllt. Der Vorgang stezt sich nun induktiv fort mit Spalte 3 und 4 usw., so daß offensichtlich Q eine obere Hessenbergmatrix wird.
3. *Nun haben wir das Produkt einer oberen Dreiecksmatrix (das ist eine (0,n-1)–Bandmatrix) mit einer oberen Hessenbergmatrix von rechts, (das ist eine (1,n-1)–Bandmatrix) und nach den Regeln für das Rechnen mit Bandmatrizen wird das Produkt eine $(0+1, \min\{n-1, 2n-2\})$–Bandmatrix, und dies ist eine obere Hessenbergmatrix. Ausserdem ist*
$$RQ = Q^T HQ$$
also unitär ähnlich zu H.

Ü 10 Bestimmen Sie die vollständige Struktur des Eigensystems einer Rang–1–Matrix

$$A = uv^H \neq O .$$

Wie verhält sich eine Vektorfolge

$$A^k x_0$$

mit beliebigem $x_0 \neq 0$?
Hinweis: entwickeln Sie x_0 nach v und dem Orthogonalraum zu v.

Es sei $\mathcal{W}$ Orthogonalraum zu v. Dann ist offenbar

$$Aw = 0 \text{ falls } w \in \mathcal{W} .$$

D.h. $\mathcal{W}$ ist invarianter Unterraum von A zum $n-1$–fachen Eigenwert null. Ferner

$$v^h u \neq 0 \Rightarrow Au = (uv^H)u = (v^H u)u$$

also ist u Eigenvektor zum Eigenwert $(v^H u)$ und A ist diagonalisierbar. Ist jedoch $v^H u = 0$, dann ist $u \in \mathcal{W}$, also auch wieder ein Eigenvektor zu null, aber A nicht diagonalähnlich. v ist dann ein Linkseigenvektor zum Eigenwert null. Schreiben wir

$$x_0 = \alpha u + Wa , \quad \text{mit } W \text{ als Basismatrix zu } \mathcal{W} ,$$

dann wird offenbar

$$A^k x_0 = (v^H u)^k \alpha u$$

d.h. alle diese Vektoren sind Vielfache eines Eigenvektors u von A.

Ü 11 Gegeben sei die Matrix

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Führen Sie zwei Schritte des v. Mises-Verfahrens (mit Normierung) mit Startvektor $\vec{x}^{(0)} = (0.1, -0.7, -0.7, 0.1)^T$ durch.

b) Folgern Sie aus a), daß für alle $k \in \{1, 2, \ldots\}$ gilt:

$$\varrho_k = 0.14 \quad , \quad \vec{x}^{(k)} = \begin{cases} \vec{x}^{(0)} , & \text{falls } k \text{ gerade} \\ (0.7, -0.1, -0.1, 0.7)^T , & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases} .$$

c) Was bedeutet das Resultat aus b?. Versuchen Sie eine Erklärung zu finden. Tips: Rang(A)=?, spur(A)=? , $A\ (1, 1, 1, 1)^T = ?$.

a) *Die Iterationsfolge lautet*

$$\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.7 \\ -0.7 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad \|\vec{x}^{(0)}\|_2 = 1, \qquad \varrho_0 = 0.14$$

$$A\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.35 \\ -0.05 \\ -0.05 \\ 0.35 \end{pmatrix} \quad \|A\vec{x}^{(0)}\|_2 = \tfrac{1}{2} \quad \vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -0.1 \\ -0.1 \\ 0.7 \end{pmatrix} \quad \varrho_1 = 0.14,$$

$$A\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.05 \\ -0.35 \\ -0.35 \\ 0.05 \end{pmatrix} \quad \|A\vec{x}^{(1)}\|_2 = \tfrac{1}{2} \quad \vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.7 \\ -0.7 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad \varrho_2 = 0.14.$$

b) *Offensichtlich osziliert die Folge bei konstanten Rayleight-Quotienten. Das Verfahren konvergiert nicht.*

c) *Das Problem ist die Existenz zweier Eigenwerte mit maximalem Betrag: Wegen Rang(A)=2 sind zwei Eigenwerte null. Da die Zeilensumme konstant* $-\frac{1}{2}$ *ist, ist ein Eigenwert* $-\frac{1}{2}$ *und wegen spur(A)=0 ein zweiter* $\frac{1}{2}$

Hausübung

H 10 Gegeben sei die hermitische Matrix

$$A \;=\; \begin{pmatrix} -9 & * & * & * & * \\ * & -2 & * & * & * \\ * & * & 1 & * & * \\ * & * & * & 4 & * \\ * & * & * & * & 21 \end{pmatrix}$$

deren Außerdiagonalelemente betragsmäßig $\leq 1/4$ seien. Zeigen Sie:

a) Die Matrix A besitzt genau einen betragsgrößten einfachen Eigenwert λ_1.

b) Der Einheitsvektor e_5 steht nicht senkrecht auf dem Eigenvektor u_1 von λ_1.
Hinweis: ON-System der Eigenvektoren betrachten.

c) Die einfache Vektoriteration

$$\tilde{x}_{k+1} := Ax_k \qquad x_{k+1} := \frac{\tilde{x}_{k+1}}{||\tilde{x}_{k+1}||}$$

mit $x_0 = e_5$ konvergiert gegen u_1.

d) Schätzen Sie überschlagsmäßig den Fehler $R(x_5; A) - \lambda_1$ ab.

a) *Nach der verschärften Fassung des Kreissatzes von Gerschgorin liegt genau ein Eigenwert im Intervall $[20, 22]$ und alle anderen Eigenwerte sind betragsmäßig kleiner.*

b) *Weil A hermitesch ist, gibt es ein ON-System bestehend aus den Eigenvektoren u_i von A. Daher*

$$e_5 = \sum_{i=1}^{5} \varepsilon_i u_i, \qquad Au_i = \lambda_i u_i, \qquad u_i^H u_j = \delta_{ij}$$

$\Rightarrow \varepsilon_1 = e_5^T u_1 = (u_1)_5$.
Sei t die Zeilennummer mit maximaler Betragskomponente von u_1, so folgt mit $A = (\alpha_{ij})$:

$$(\alpha_{tt} - \lambda_1)\,(u_1)_t + \sum_{j=1, j\neq t}^{5} \alpha_{tj}\,(u_1)_j \;=\; 0$$

$\Rightarrow$ *(mit der Voraussetzung an die Außerdiagonalelemente)*

$$|\alpha_{tt} - \lambda_1| \;\leq\; \sum_{j=1, j\neq t}^{5} |\alpha_{tj}| \;\leq\; 1.$$

Wegen $\lambda_1 \in [20, 22]$ und $\alpha_{ii} < 19$ $i = 1, 2, 3, 4$ folgt $t = 5$, also $\varepsilon_1 \neq 0$.

c) *Mit der Diagonalähnlichkeit von A sowie den Teilen i) und ii) sind die Voraussetzungen des Satzes zur Konvergenz des v. Mises Verfahrens erfüllt.*

d) *Wir benutzen wieder die ON-Basisdarstellung von x_5.*

$$
\begin{aligned}
|R(x_5,A)-\lambda_1| &= \left|\frac{x_5^T A x_5}{x_5^T x_5}-\lambda_1\right| = \frac{\left|\sum_{i=1}^5 \varepsilon_i^2\lambda_i^{11}-\lambda_1\sum_{i=1}^5 \varepsilon_i^2\lambda_i^{10}\right|}{\left|\sum_{i=1}^5 \varepsilon_i^2\lambda_i^{10}\right|} \\
&\le \frac{\sum\limits_{i=2}^5 \varepsilon^2|\lambda_i-\lambda_1|\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right|^{10}}{\varepsilon_1^2+\sum\limits_{i=2}^5 \varepsilon_i^2\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right|^{10}} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\max_{2\le i\le 5}|\lambda_i-\lambda_1|\frac{\sum_{i=2}^5\varepsilon_i^2}{\varepsilon_1^2} \\
&\le \frac{32}{1024}\frac{1-\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1^2} \le 0.00284,
\end{aligned}
$$

weil $\max|\lambda_i-\lambda_1| \le 32$ *und* $|\lambda_i/\lambda_1|\le 1/2$ *sowie*

$$21 = R(e_5;A) = \varepsilon_1^2\lambda_1+\sum_{i=2}^5\varepsilon_i^2\lambda_i \le 22\varepsilon_1^2+10(1-\varepsilon_1^2) \text{ d.h. } \varepsilon_1^2 \ge \frac{11}{12}.$$

H 11 Gegeben sei

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad (\text{“ Jordan–Kästchen ”}) \text{ mit } \lambda \neq 0$$

Zeigen Sie, daß die Vektorfolge

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_{k+1} &= Jx_k \\
x_{k+1} &= \frac{\tilde{x}_{k+1}}{|\tilde{\xi}_{1,k+1}|}
\end{aligned}
$$

mit $\tilde{x}_{k+1} = (\tilde{\xi}_{1,k+1},...,\tilde{\xi}_{n,k+1})^T$ (direkte Iteration mit Normierung der ersten Komponente) und $x_0 = (1,...,1)^T$ als Startvektor gegen einen (welchen ?) Eigenvektor x von J konvergiert und schätzen Sie die Fehlerreduktion

$$\frac{\|x_{k+1}-x\|_\infty}{\|x_k-x\|_\infty}$$

größenordnungsmäßig.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß

$$
\begin{aligned}
J^k &= \sum_{\nu=0}^{\min\{n-1,k\}} \lambda^{k-\nu}\binom{k}{\nu}T_\nu \qquad \text{mit} \qquad T_\nu = \left(\tau_{ij}^{(\nu)}\right), \\
\tau_{ij}^{(\nu)} &= \begin{cases} 1\,, & j = i+\nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Die Zwischenbehauptung lautet in Komponentenschreibweise

$$(J^k)_{i,j} = \lambda^{k-(j-i)} \binom{k}{j-i} \quad \text{für } j \geq i$$

d.h.u.a. die Elemente auf jeder Nebendiagonale sind gleich. Daß J^k eine obere Dreiecksmatrix ist, ist klar und daß die Hauptdiagonalelemente λ^k lauten ebenfalls, wie man an der Formel für die Matrixmultiplikation ablesen kann. Wir betrachten nun ein allgemeines Element oberhalb der Diagonalen: Wieder nach der Formel für die Matrixmultiplikation "Zeile i mal Spalte j" folgt für $n \geq j > i$

$$\begin{aligned} (J^{k+1})_{i,j} &= (JJ^k)_{i,j} \\ &= \lambda(J^k)_{i,j} + (J^k)_{i+1,j} \\ &= \lambda\lambda^{k-(j-i)} \binom{k}{j-i} + \lambda^{k-(j-i-1)} \binom{k}{j-i-1} \\ &= \lambda^{k+1-(j-i)} \left(\binom{k}{j-i} + \binom{k}{j-i-1} \right) \\ &= \lambda^{k+1-(j-i)} \binom{k+1}{j-i} \end{aligned}$$

wie behauptet.
J hat nur einen einzigen Eigenvektor, nämlich ein Vielfaches des ersten Koordinateneinheitsvektors, mit der angegebenen Normierung also $x = e_1$. Wegen der Grenzwertbetrachtung können wir $k \geq n$ annehmen, sodaß J^k nun eine vollbesetzte obere Dreiecksmatrix ist. Da es irrelevant ist, ob wir die Normierung während der Rekursion immer von neuem oder nur abschliessend vornehmen, haben wir

$$\frac{(J^k x_0)_i}{(J^k x_0)_1} = \frac{\sum_{j=0}^{n-i} \lambda^{k-j} \binom{k}{j}}{\sum_{j=0}^{n-1} \lambda^{k-j} \binom{k}{j}}$$

und deshalb für den Fehler $||x^k - x||_\infty$

$$\max_{i=2,\ldots,n} \left| \frac{\sum_{j=0}^{n-i} \lambda^{-j} \binom{k}{j}}{\sum_{j=0}^{n-1} \lambda^{-j} \binom{k}{j}} \right|$$

während der Fehler in der ersten Komponente null ist. Die einzelnen Summanden in den Summen mit der Struktur

$$\frac{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-j+1)}{\lambda^j \cdot 2 \cdot \ldots \cdot j}$$

wachsen für grosses k sehr schnell an, d.h. der Wert der Summe wird im wesentlichen durch den letzten Summanden bestimmt, sodass der grösste Fehler schliesslich für $i = 2$ auftritt mit einer Grössenordnung von $1/k$ (wie im Skript behauptet). Die Fehlerreduktion verschlechtert sich also immer mehr und der Grenzwert liegt bei 1.

H 12 Sei A eine diagonalähnliche komplexe Matrix mit genau einem einfachen betragsdominanten Eigenwert λ_1. Betrachten Sie folgende Variante der direkten Iteration von v. Mises:

1. Wähle x_0 und $y_0 \in \mathbb{C}^n$ geeignet.
2. Für $k = 0, \ldots,$ setze

$$\begin{aligned} y_{k+1}^H &= y_k^H A \\ x_{k+1} &= A x_k \ . \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß dann

$$\left| \frac{y_k^H A x_k}{y_k^H x_k} - \lambda_1 \right| = \mathcal{O}(\ (|\lambda_2/\lambda_1|)^{2k})$$

gilt. Wie präzisiert man "geeignet gewählt"?

Offenbar ist die Folge $\{y_k\}$ die Vektorfolge aus der direkten Iteration nach von Mises für A^H mit y_0 als Startvektor. In Analogie zur Konvergenzvoraussetzung für $\{x_k\}$ fordern wir deshalb

$$y_0 = \sum_{i=1}^{n} \eta_i v_i \quad mit \quad \eta_1 \neq 0 \ ,$$

wobei die v_i die Linkseigenvektoren von A sind. Wir wählen diese so, daß

$$v_j^H u_i = \delta_{i,j} \quad \forall \ i, j$$

mit den u_i als (Rechts)eigenvektoren von A. Nun ist

$$\begin{aligned} x_k &= \lambda_1^k \xi_1 (u_1 + \sum_{j=2}^{n} (\frac{\lambda_j}{\lambda_1})^k \frac{\xi_j}{\xi_1} u_j) \\ y_k &= \bar{\lambda}_1^k \eta_1 (v_1 + \sum_{j=2}^{n} (\frac{\bar{\lambda}_j}{\bar{\lambda}_1})^k \frac{\eta_j}{\eta_1} v_j) \end{aligned}$$

und wegen der Biorthogonalität der u_i und v_j

$$\begin{aligned} \frac{y_k^H A x_k}{y_k^H x_k} &= \frac{y_k^H x_{k+1}}{y_k^H x_k} \\ &= \lambda_1 \frac{v_1^H u_1 + \sum_{j=2}^{n} (\lambda_j/\lambda_1)^{2k+1} (\xi_j/\bar{\eta}_j)/(\xi_1 \bar{\eta}_1) v_j^H u_j}{v_1^H u_1 + \sum_{j=2}^{n} (\lambda_j/\lambda_1)^{2k} (\xi_j \bar{\eta}_j)/(\xi_1 \bar{\eta}_1) v_j^H u_j} \\ &= \lambda_1 (1 + \mathcal{O}((\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^{2k})) \end{aligned}$$