Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Sommersemseter 2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

11.5.2009

Numerische Lineare Algebra
Übung 4

Präsenzübung

Ü 9 Es sei H eine nichtzerfallende obere Hessenbergmatrix und

$$H = QR$$

eine durch Anwendung von Givensreflektoren von links auf H erzeugte `QR`-Zerlegung, d.h. Q ist unitär und R eine obere Dreiecksmatrix. Zeigen Sie

1. Es gilt
$$|r_{i,i}| \geq |h_{i+1,i}| > 0 \ , \ i = 1, \ldots, n-1 \ .$$
2. Q ist eine obere Hessenbergmatrix.
3. RQ ist eine obere Hessenbergmatrix und ähnlich zu H.

Hinweis: Beachten Sie, in welcher Reihenfolge Q aus den einzelnen Givensreflektoren zusammenmultipliziert wird. Q steht in dieser Formel auf der rechten Seite!

Ü 10 Bestimmen Sie die vollständige Struktur des Eigensystems einer Rang–1–Matrix

$$A = uv^H \neq O \ .$$

Wie verhält sich eine Vektorfolge

$$A^k x_0$$

mit beliebigem $x_0 \neq 0$?
Hinweis: entwickeln Sie x_0 nach v und dem Orthogonalraum zu v.

Ü 11 Gegeben sei die Matrix

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Führen Sie zwei Schritte des v. Mises-Verfahrens (mit Normierung) mit Startvektor $\vec{x}^{(0)} = (0.1, -0.7, -0.7, 0.1)^T$ durch.

b) Folgern Sie aus a), daß für alle $k \in \{1, 2, \ldots\}$ gilt:

$$\varrho_k = 0.14 \quad , \quad \vec{x}^{(k)} = \begin{cases} \vec{x}^{(0)} \, , & \text{falls } k \text{ gerade} \\ (0.7, -0.1, -0.1, 0.7)^T \, , & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases} \ .$$

c) Was bedeutet das Resultat aus b?. Versuchen Sie eine Erklärung zu finden. Tips: Rang(A)=?, spur(A)=? , $A\ (1,1,1,1)^T\ = ?$.

Hausübung

H 10 Gegeben sei die hermitische Matrix

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} -9 & * & * & * & * \\ * & -2 & * & * & * \\ * & * & 1 & * & * \\ * & * & * & 4 & * \\ * & * & * & * & 21 \end{pmatrix}$$

deren Außerdiagonalelemente betragsmäßig $\leq 1/4$ seien. Zeigen Sie:

a) Die Matrix A besitzt genau einen betragsgrößten einfachen Eigenwert λ_1.

b) Der Einheitsvektor e_5 steht nicht senkrecht auf dem Eigenvektor u_1 von λ_1.
Hinweis: ON-System der Eigenvektoren betrachten.

c) Die einfache Vektoriteration

$$\tilde{x}_{k+1} := Ax_k \qquad x_{k+1} := \frac{\tilde{x}_{k+1}}{||\tilde{x}_{k+1}||}$$

mit $x_0 = e_5$ konvergiert gegen u_1.

d) Schätzen Sie überschlagsmäßig den Fehler $R(x_5; A) - \lambda_1$ ab.

H 11 Gegeben sei

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{(„ Jordan–Kästchen ") mit } \lambda \neq 0$$

Zeigen Sie, daß die Vektorfolge

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= Jx_k \\ x_{k+1} &= \frac{\tilde{x}_{k+1}}{|\tilde{\xi}_{1,k+1}|} \end{aligned}$$

mit $\tilde{x}_{k+1} = (\tilde{\xi}_{1,k+1}, ..., \tilde{\xi}_{n,k+1})^T$ (direkte Iteration mit Normierung der ersten Komponente) und $x_0 = (1, ..., 1)^T$ als Startvektor gegen einen (welchen ?) Eigenvektor x von J konvergiert und schätzen Sie die Fehlerreduktion

$$\frac{\|x_{k+1} - x\|_\infty}{\|x_k - x\|_\infty}$$

größenordnungsmäßig.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß

$$J^k = \sum_{\nu=0}^{\min\{n-1,k\}} \lambda^{k-\nu} \binom{k}{\nu} T_\nu \qquad \text{mit} \qquad T_\nu = \left(\tau_{ij}^{(\nu)}\right),$$
$$\tau_{ij}^{(\nu)} = \begin{cases} 1\,, & j = i+\nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

H 12 Sei A eine diagonalähnliche komplexe Matrix mit genau einem einfachen betragsdominanten Eigenwert λ_1. Betrachten Sie folgende Variante der direkten Iteration von v. Mises:

1. Wähle x_0 und $y_0 \in \mathbb{C}^n$ geeignet.
2. Für $k = 0, \ldots,$ setze

$$\begin{aligned} y_{k+1}^H &= y_k^H A \\ x_{k+1} &= A x_k\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß dann
$$\left| \frac{y_k^H A x_k}{y_k^H x_k} - \lambda_1 \right| = \mathcal{O}(\,(|\lambda_2/\lambda_1|)^{2k})$$
gilt. Wie präzisiert man "geeignet gewählt"?