Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Sommersemester 2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

4.5.2009

Numerische lineare Algebra
Übung 3

Präsenzübung

Ü 6 Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Frobeniusnorm definiert durch

$$||A||_F^2 \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{i,j}^2 \ .$$

Zeigen Sie: $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times r}$ erfülle

$$Q_1^T Q_1 = I \ .$$

Man setze

$$E_1 = AQ_1 - Q_1 S \ .$$

Dann ist $||E_1||_F$ minimal genau für

$$S = Q_1^T A Q_1 \ .$$

Hinweis: Es genügt hier, die Optimalität für jede Spalte einzeln zu zeigen.

Ü 7 (**Einfache Eigenwerte einer Hessenbergmatrix**)
Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ eine obere Hessenbergmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & * & * & * \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{22} & * & * \\ & \ddots & \ddots & * \\ & & \alpha_{n,n-1} & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \alpha_{i,i-1} \neq 0 \ \text{ für } i = 2, ..., n$$

Zeigen Sie :

a) Alle Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ von A sind geometrisch einfach, .d.h. Rang$(A-\lambda_i I) = n-1$.

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar, so sind sie auch algebraisch einfach.

c) Ist ein $\alpha_{i,i-1} = 0$, so zerfällt das Eigenwertproblem in zwei Eigenwertprobleme für Hessenbergmatrizen niedrigerer Dimension.

Ü 8 **Vektoriteration**
Die Vektoriteration nach von Mises ist in ihrer einfachsten Form definiert durch die Rekursion

$$x_{k+1} = Ax_k$$

also äquivalent zu $x_k = A^k x_0$. Die entsprechende Iteration für die Inverse einer verschobenen Matrix wird nach Wielandt gerechnet als

$$\text{löse } (A - \mu I)x_{k+1} = x_k.$$

Gegeben sei die Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix},$$

und der Startvektor $x_0 = (1, 1, 1)^T$.

a) Führen Sie ausgehend von x_0 einen Schritt der Iteration nach v. Mises durch. Schätzen Sie durch $R(x_1; A)$ den größten Eigenwert von A.

b) Führen sie mit dem aus Teil a) erhaltenen x_1 und der Näherung für den größten Eigenwert als μ einen inversen Iterationsschritt nach Wielandt durch. Wie genau ist die so erhaltene Näherung?

Hinweis: Der größte Eigenwert von A ist 10.0635.

Hausübung

H 7 Zeigen Sie, daß man eine Ähnlichkeitstransformation auf Hessenberggestalt auch mit unteren Dreiecksmatrizen und Zeilenvertauschungen wie bei der Gauss-Elimination erreichen kann und führen Sie dies an der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

durch.
Hinweis: Einen Gauss-Eliminationsschritt kann man matriziell beschreiben durch Multiplikation mit einer unteren Dreiecksmatrix mit Diagonale $(1, \ldots, 1)$ wobei nur in Spalte i unterhalb des Diagonalelementes die sogenannten Multiplikatoren stehen. Eine solche Matrix kann geschrieben werden als

$$I - a_i e_i^T$$

und ihre Inverse ist dann

$$I + a_i e_i^T$$

Man beachte, daß a_i höchstens ab dem Element $i + 1$ ungleich null ist.

H 8 Transformieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -12 & -4 & -3 \\ -12 & 625 & 100 & 75 \\ -4 & 100 & 16 & 12 \\ -3 & 75 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

durch eine unitäre Ähnlichkeitstransformation auf Tridiagonalgestalt und bestimmen Sie Konstanten $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ so, daß für die vier Eigenwerte λ_i von A gilt:

$$a_0 < \lambda_1 < a_1 < \lambda_2 < a_2 < \lambda_3 < a_3 < \lambda_4 < a_4.$$

Hinweis: Verwenden Sie zur Bestimmung der a_i sowohl den Satz von GERSCHGORIN, als auch das Bisektionsverfahren.

H 9 Es sei A eine nichtzerfallende obere Hessenbergmatrix. Zeigen Sie: jeder Eigenvektor von A hat eine letzte Komponente ungleich null und jeder Linkseigenvektor hat eine erste Komponente ungleich null, d.h. das Skalarprodukt jedes Eigenvektors mit e_n bzw. Linkseigenvektors mit e_1 ist ungleich null. (Dieses Ergebnis löst das Problem der Startvektorwahl beim Verfahren von von Mises bzw. Wielandt.)

Numerische lineare Algebra
Übung 3, Lösungsvorschlag

Präsenzübung

Ü 6 Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Frobeniusnorm definiert durch

$$||A||_F^2 \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}^2 \; .$$

Zeigen Sie: $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times r}$ erfülle

$$Q_1^T Q_1 = I \; .$$

Man setze

$$E_1 = AQ_1 - Q_1 S \; .$$

Dann ist $||E_1||_F$ minimal genau für

$$S = Q_1^T A Q_1 \; .$$

Hinweis: Es genügt hier, die Optimalität für jede Spalte einzeln zu zeigen.

Wir gehen spaltenweise vor, was auf Grund der Definition der Frobeniusnorm möglich ist. e_j sei der $j-$te Koordinateneinheitsvektor in $\mathbb{R}^r$. Q sei die Ergänzung von Q_1 zu einem vollständigen Orthonormalsystem. Dann gilt

$$\begin{aligned} ||E_1 e_j||_2^2 &= ||AQ_1 e_j - Q_1 S e_j||_2^2 \\ &= ||Q^T(AQ_1 e_j - Q_1 S e_j)||_2^2 \\ &= ||Q_1^T A Q_1 e_j - S e_j||_2^2 + ||Q_2^T A Q_1 e_j||_2^2 \end{aligned}$$

und dies ist minimal genau dann, wenn der erste Summand null ist.

Bem.: $Q_1^T A Q_1$ wird als matrizieller Rayleighquotient bezeichnet. Wir haben hier also eine Optimalitätseigenschaft analog zu Satz 1.1.4 a) bewiesen.

Ü 7 (**Einfache Eigenwerte einer Hessenbergmatrix**)
Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ eine obere Hessenbergmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & * & * & * \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{22} & * & * \\ & \ddots & \ddots & * \\ & & \alpha_{n,n-1} & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \alpha_{i,i-1} \neq 0 \text{ für } i = 2, ..., n$$

Zeigen Sie :

a) Alle Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ von A sind geometrisch einfach, .d.h. Rang$(A - \lambda_i I) = n - 1$.

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar, so sind sie auch algebraisch einfach.

c) Ist ein $\alpha_{i,i-1} = 0$, so zerfällt das Eigenwertproblem in zwei Eigenwertprobleme für Hessenbergmatrizen niedrigerer Dimension.

a) *geometrisch einfach bedeutet:*
Ist λ ein Eigenwert, so gilt

$$\text{Rang}(\lambda I - A) = n - 1$$

Für die Matrizen $\lambda I - A$ gilt in unserem Fall einer Hessenbergmatrix A mit $\alpha_{i,i-1} \neq 0$ sind die letzten $n-1$ Zeilen linear unabhängig. Damit ist der Rang$(\lambda I - A) \geq n-1$. Da λ Eigenwert ist, ist gleichzeitig der Rang auch $\leq n-1$. Daraus folgt die Behauptung.

b) *Ist die Matrix diagonalisierbar, so hat die Matrix n Eigenvektoren und damit ist die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen, also in unserem Fall auch gleich eins.*

c) *Wenn $\alpha_{i,i-1} = 0$, dann hat A folgende Gestalt:*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

wobei $A_1 \in \mathbb{C}^{i-1,i-1}$ und $A_2 \in \mathbb{C}^{n-i+1,n-i+1}$ wieder Hessenbergmatrizen sind.
Um das Eigenwertproblem zu lösen bestimmt man die Schursche Normalform. Dies ergibt folgende Transformationen auf obere Dreiecksgestalt mit orthogonalen Matrizen Q_1 und Q_2: $Q_1^H A_1 Q_1$ und $Q_2^H A_2 Q_2$. Fasst man diese zu einer großen Matrix zusammen

$$Q := \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$$

so erhält man die Schursche Normalform von A mit $T = Q^H A Q$.

Ü 8 Vektoriteration

Die Vektoriteration nach von Mises ist in ihrer einfachsten Form definiert durch die Rekursion

$$x_{k+1} = Ax_k$$

also äquivalent zu $x_k = A^k x_0$. Die entsprechende Iteration für die Inverse einer verschobenen Matrix wird nach Wielandt gerechnet als

$$\text{löse } (A - \mu I)x_{k+1} = x_k.$$

Gegeben sei die Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix},$$

und der Startvektor $x_0 = (1,1,1)^T$.

a) Führen Sie ausgehend von x_0 einen Schritt der Iteration nach v. Mises durch. Schätzen Sie durch $R(x_1; A)$ den größten Eigenwert von A.

b) Führen sie mit dem aus Teil a) erhaltenen x_1 und der Näherung für den größten Eigenwert als μ einen inversen Iterationsschritt nach Wielandt durch. Wie genau ist die so erhaltene Näherung?

Hinweis: Der größte Eigenwert von A ist 10.0635.

a) *Wir führen den Iterationsschritt durch:*

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Als Näherung für den größten Eigenwert erhalten wir $R(x_1, A) = 10$.

b) *Hier haben wir das LGS*

$$\begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

zu lösen. Wir erhalten $x_1 = (36, 126, 201)^T$ *und als Näherung* $R(x_2, A) = 10.0635$. *Die Näherung besitzt also mindestens 6 gültige Stellen!*

Hausübung

H 7 Zeigen Sie, daß man eine Ähnlichkeitstransformation auf Hessenberggestalt auch mit unteren Dreiecksmatrizen und Zeilenvertauschungen wie bei der Gauss-Elimination erreichen kann und führen Sie dies an der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

durch.

Hinweis: Einen Gauss-Eliminationsschritt kann man matriziell beschreiben durch Multiplikation mit einer unteren Dreiecksmatrix mit Diagonale $(1, \ldots, 1)$ wobei nur in Spalte i unterhalb des Diagonalelementes die sogenannten Multiplikatoren stehen. Eine solche Matrix kann geschrieben werden als

$$I - a_i e_i^T$$

und ihre Inverse ist dann

$$I + a_i e_i^T$$

Man beachte, daß a_i höchstens ab dem Element $i + 1$ ungleich null ist.

Die Pivotisierung wird analog der beim Gauss'schen Algorithmus durchgeführt, wobei nun das Element $(i+1, i)$ zum betragsgrössten unter den Elementen <u>unterhalb</u> der Diagonalen in Spalte i wird, $i = 1, \ldots, n-2$. Die entspechende Spaltenvertauschung wird dann gleichnamig durchgeführt und zerstört die gerade erzeugten Nullen deshalb nicht. (z.B. im ersten Schritt keine Vertausuchung oder Vertauschung Spalte 2 mit Spalte $k > 2$.) Das Gleiche gilt für die Multiplikation mit der inversen Eliminationsmatrix von rechts: z.B. wird im Schritt i eine Linearkombination der Zeile $i + 1$ mit den Zeilen $j > i + 1$ ausgeführt und die entsprechende Operation von rechts berührt nicht Spalte i. Man beachte, daß hier im ersten Schritt die Multiplikatoren in Spalte 2 stehen usw.

Am Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2.5 & 2.5 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2.5 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2.5 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2.5 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2.5 & 3 \\ 0 & -0.5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2.5 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 2.5 \\ 0 & -0.5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2.5 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 2.5 \\ 0 & 0 & -0.625 & 1.3125 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2.5 & 1.125 & -1 \\ 2 & -1 & 0.125 & -1 \\ 0 & 4 & 2.6875 & 2.5 \\ 0 & 0 & -0.7890625 & 1.3125 \end{pmatrix}$$

H 8 Transformieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -12 & -4 & -3 \\ -12 & 625 & 100 & 75 \\ -4 & 100 & 16 & 12 \\ -3 & 75 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

durch eine unitäre Ähnlichkeitstransformation auf Tridiagonalgestalt und bestimmen Sie Konstanten $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ so, daß für die vier Eigenwerte λ_i von A gilt:

$$a_0 < \lambda_1 < a_1 < \lambda_2 < a_2 < \lambda_3 < a_3 < \lambda_4 < a_4.$$

Hinweis: Verwenden Sie zur Bestimmung der a_i sowohl den Satz von GERSCHGORIN, als auch das Bisektionsverfahren.

Der erste Schritt der Transformation auf Tridiagonalgestalt verwendet

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sqrt{3^2+4^2+12^2} = 13,\\ \hat{w}_1 &= \begin{pmatrix} -25\\ -4\\ -3\end{pmatrix} \quad \textit{und}\\ \hat{U}_1 &= I - \tfrac{2}{\hat{w}_1^T\hat{w}_1}\hat{w}_1\hat{w}_1^T.\end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$U_1A^{(1)}U_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} 11 & 13 & 0 & 0\\ \hline 13 & & & \\ 0 & & \hat{U}_1A_{22}^{(1)}\hat{U}_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

Da aber $A_{22}^{(1)} = \hat{w}_1\hat{w}_1$ *gilt ist*

$$\hat{U}_1A_{22}^{(1)}\hat{U}_1 = (I - \frac{2}{\hat{w}_1^T\hat{w}_1}\hat{w}_1\hat{w}_1^T)\hat{w}_1\hat{w}_1^T(I - \frac{2}{\hat{w}_1^T\hat{w}_1}\hat{w}_1\hat{w}_1^T) = \hat{w}_1\hat{w}_1^T$$

und somit

$$A^{(2)} = U_1A^{(1)}U_1 = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 0 & 0\\ 13 & 625 & 100 & 75\\ 0 & 100 & 16 & 12\\ 0 & 75 & 12 & 9\end{pmatrix}.$$

Im zweiten Schritt wird verwendet

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \sqrt{100^2+75^2} = 125,\\ \hat{w}_2 &= \begin{pmatrix} 225\\ 75\end{pmatrix} \quad \textit{und}\\ \hat{U}_2 &= I - \tfrac{2}{56250}\hat{w}_2\hat{w}_2^T.\end{aligned}$$

Es ergibt sich Es ergibt sich

$$U_2A^{(2)}U_2 = \left(\begin{array}{c|c|cc} 11 & 13 & 0 & 0\\ \hline 13 & 625 & -125 & 0\\ \hline 0 & -125 & \hat{U}_2A_{22}^{(2)}\hat{U}_2 & \\ 0 & 0 & & \end{array}\right),$$

wobei

$$\hat{U}_2A_{22}^{(2)}\hat{U}_2 = \begin{pmatrix} 25 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Die Transformation von A auf Tridiagonalgestalt lautet damit

$$A^{(3)} = U_2U_1AU_1U_2 = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 0 & 0\\ 13 & 625 & -125 & 0\\ 0 & -125 & 25 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Bei der Abschätzung der Eigenwerte fällt auf, daß offensichtlich ein Eigenwert von A gleich 0 ist. Zur Abschätzung der weiteren Eigenwerte kann die 3×3-Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 0 \\ 13 & 625 & -125 \\ 0 & -125 & 25 \end{pmatrix}$$

verwendet werden. Der Satz von GERSCHGORIN *liefert die Intervalle* $[-2, 24]$, $[-100, 150]$ *und* $[487, 763]$. *Man kann also wählen* $a_0 = -101$ *und* $a_4 = 764$.

Ferner überlappen sich die beiden ersten Intervalle, das dritte aber ist isoliert. Also kann man $a_3 \in (150, 487)$ *wählen, z.B.* $a_3 = 400$.

Um a_1 *und* a_2 *zu bestimmen kann man mit dem Bisektionsverfahren in der Nähe der* 0 *suchen. Wir setzen also*

$$\mu = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} q_1 & = & 11 & > 0 \\ q_2 & = & 625 - \frac{13^2}{11} = 609.63637 & > 0 \\ q_3 & = & 25 - \frac{125^2}{609.63} = -0.630 & < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1EW < 0.$$

$$\mu = -1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} q_1 & = & 12 & > 0 \\ q_2 & = & 626 - \frac{13^2}{12} = 611.91667 & > 0 \\ q_3 & = & 26 - \frac{125^2}{611.91} = 0.47 & > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \textit{kein } EW < -1.$$

$$\mu = -0.1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} q_1 & = & 11.1 & > 0 \\ q_2 & = & 625.1 - 15.225 = 609.874 & > 0 \\ q_3 & = & 25.1 - \frac{125^2}{609.874} = -0.52 & < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1EW < -0.1.$$

Da 0 *ein Eigenwert ist kann man demnach* $a_0 = -1$ *ansetzen und* $a_1 = -0.1$.

Bei der Wahl von a_2 *hilft*

$$\mu = 0.1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} q_1 & = & 10.9 & > 0 \\ q_2 & = & 624.9 - \frac{13^2}{10.9} = 609.39542 & > 0 \\ q_3 & = & 24.9 - \frac{125^2}{609.395} & < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2EW > 0.1.$$

Folglich kann muß $\lambda_3 > 0.1$ *sein und* $a_2 = 0.1$ *kann gewählt werden.*

Die exakten Eigenwerte der Matrix lauten

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 & = -0.57399 \\ \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_3 & = 11.31978 \\ \lambda_4 & = 650.25421 \end{array}$$

H 9 Es sei A eine nichtzerfallende obere Hessenbergmatrix. Zeigen Sie: jeder Eigenvektor von A hat eine letzte Komponente ungleich null und jeder Linkseigenvektor hat eine erste Komponente ungleich null, d.h. das Skalarprodukt jedes Eigenvektors mit e_n bzw. Linkseigenvektors mit e_1 ist ungleich null. (Dieses Ergebnis löst das Problem der Startvektorwahl beim Verfahren von von Mises bzw. Wielandt.)

Wir betrachten die Gleichung

$$(A - \lambda I)x \ = \ 0 \ , \qquad x \ \neq \ 0 \ .$$

Die letzte Zeile lautet hier

$$\alpha_{n,n-1}\xi_{n-1} + (\alpha_{n,n} - \lambda)\xi_n \ = \ 0$$

und aus $\xi_n = 0$ *folgt wegen* $\alpha_{n,n-1} \neq 0$, *daß* $\xi_{n-1} = 0$. *Induktiv erhält man dann aus den Zeilen* $n-1, \ldots, 1$, *daß* $\xi_i = 0 \ \forall \ i$, *also einen Widerspruch. Analog geht man über Zeile 1 bis* n *von*

$$y^H(A - \lambda I) \ = \ 0 \ , \qquad y \ \neq \ 0$$

vor bei der Annahme $\eta_1 \ = \ 0$.