Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Sommersemester 2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

4.5.2009

Numerische lineare Algebra
Übung 3

Präsenzübung

Ü 6 Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Frobeniusnorm definiert durch

$$||A||_F^2 \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}^2 \ .$$

Zeigen Sie: $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times r}$ erfülle

$$Q_1^T Q_1 = I \ .$$

Man setze

$$E_1 = AQ_1 - Q_1 S \ .$$

Dann ist $||E_1||_F$ minimal genau für

$$S = Q_1^T A Q_1 \ .$$

Hinweis: Es genügt hier, die Optimalität für jede Spalte einzeln zu zeigen.

Ü 7 (**Einfache Eigenwerte einer Hessenbergmatrix**)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ eine obere Hessenbergmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & * & * & * \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{22} & * & * \\ & \ddots & \ddots & * \\ & & \alpha_{n,n-1} & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \alpha_{i,i-1} \neq 0 \ \text{ für } i = 2, ..., n$$

Zeigen Sie :

a) Alle Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ von A sind geometrisch einfach, .d.h. $\mathrm{Rang}(A-\lambda_i I) = n-1$.

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar, so sind sie auch algebraisch einfach.

c) Ist ein $\alpha_{i,i-1} = 0$, so zerfällt das Eigenwertproblem in zwei Eigenwertprobleme für Hessenbergmatrizen niedrigerer Dimension.

Ü 8 **Vektoriteration**

Die Vektoriteration nach von Mises ist in ihrer einfachsten Form definiert durch die Rekursion

$$x_{k+1} = Ax_k$$

also äquivalent zu $x_k = A^k x_0$. Die entsprechende Iteration für die Inverse einer verschobenen Matrix wird nach Wielandt gerechnet als

$$\text{löse } (A - \mu I)x_{k+1} = x_k.$$

Gegeben sei die Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix},$$

und der Startvektor $x_0 = (1, 1, 1)^T$.

a) Führen Sie ausgehend von x_0 einen Schritt der Iteration nach v. Mises durch. Schätzen Sie durch $R(x_1; A)$ den größten Eigenwert von A.

b) Führen sie mit dem aus Teil a) erhaltenen x_1 und der Näherung für den größten Eigenwert als μ einen inversen Iterationsschritt nach Wielandt durch. Wie genau ist die so erhaltene Näherung?

Hinweis: Der größte Eigenwert von A ist 10.0635.

Hausübung

H 7 Zeigen Sie, daß man eine Ähnlichkeitstransformation auf Hessenberggestalt auch mit unteren Dreiecksmatrizen und Zeilenvertauschungen wie bei der Gauss-Elimination erreichen kann und führen Sie dies an der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

durch.

Hinweis: Einen Gauss-Eliminationsschritt kann man matriziell beschreiben durch Multiplikation mit einer unteren Dreiecksmatrix mit Diagonale $(1, \ldots, 1)$ wobei nur in Spalte i unterhalb des Diagonalelementes die sogenannten Multiplikatoren stehen. Eine solche Matrix kann geschrieben werden als

$$I - a_i e_i^T$$

und ihre Inverse ist dann

$$I + a_i e_i^T$$

Man beachte, daß a_i höchstens ab dem Element $i + 1$ ungleich null ist.

H 8 Transformieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -12 & -4 & -3 \\ -12 & 625 & 100 & 75 \\ -4 & 100 & 16 & 12 \\ -3 & 75 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

durch eine unitäre Ähnlichkeitstransformation auf Tridiagonalgestalt und bestimmen Sie Konstanten $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ so, daß für die vier Eigenwerte λ_i von A gilt:

$$a_0 < \lambda_1 < a_1 < \lambda_2 < a_2 < \lambda_3 < a_3 < \lambda_4 < a_4.$$

Hinweis: Verwenden Sie zur Bestimmung der a_i sowohl den Satz von Gerschgorin, als auch das Bisektionsverfahren.

H 9 Es sei A eine nichtzerfallende obere Hessenbergmatrix. Zeigen Sie: jeder Eigenvektor von A hat eine letzte Komponente ungleich null und jeder Linkseigenvektor hat eine erste Komponente ungleich null, d.h. das Skalarprodukt jedes Eigenvektors mit e_n bzw. Linkseigenvektors mit e_1 ist ungleich null. (Dieses Ergebnis löst das Problem der Startvektorwahl beim Verfahren von von Mises bzw. Wielandt.)