Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Sommersemester 2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

27.04.09

Numerische Lineare Algebra
Übung 2

Präsenzübung

Ü 3 Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ beide hermitisch und $\lambda_i(A), \lambda_j(B)$ die dazugehörigen Eigenwerte mit

$$\lambda_1(A) \geq ... \geq \lambda_n(A), \qquad \lambda_1(B) \geq ... \geq \lambda_n(B).$$

Man beweise mit Hilfe des Courant'schen Minimaxprinzips die Aussage von Satz 1.1.7

$$|\lambda_i(A) - \lambda_i(B)| \;\leq\; \rho(B - A).$$

Hinweis: Man schreibe $B = A + C$ mit $C = B - A$ und versuche mit dem Minimaxprinzip, angewendet auf $A + C$, die Ungleichung

$$\lambda_i(B) \leq \lambda_i(A) + \rho(C)$$

zu zeigen. Dann vertausche man die Rollen von A und B.

Ü 4 **a)** Sei $A = \text{Blockdiag}(D_1, ..., D_N)$ eine Blockdiagonalmatrix deren Diagonalblöcke D_i quadratische Matrizen sind. Zeigen Sie: Jeder Eigenwert von A ist Eigenwert eines D_i und umgekehrt (d.h.u.a. die Vielfachheit eines mehrfach auftretenden Eigenwertes summiert sich)

b) Für

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10^{-5} & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

bestimme man mit Hilfe von Abschätzungen für Eigenwerte gestörter Matrizen die Eigenwerte bis auf einen Fehler von 10^{-5}.
Hinweis: Betrachten Sie mit einer Matrix B die Differenz $B - A$.

Ü 5 (**Transformation auf Hessenberg bzw. Tridiagonalgestalt**)
Transformieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 8 \\ -6 & 15 & 10 \\ 8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

durch eine unitäre Ähnlichkeitstransformation auf Hessenberg- und damit Tridiagonalgestalt.

Hausübung

H 4 Sei A eine hermitische $n \times n$ Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Zeigen Sie, daß für jede Hauptuntermatrix

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_{ii} & \cdots & \alpha_{ij} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{ji} & \cdots & \alpha_{jj} \end{pmatrix}$$

mit $1 \leq i < j \leq n$ gilt:

a) B besitzt reelle Eigenwerte $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_{j-i+1}$.

b) Es gelten die Ungleichungen $\lambda_1 \geq \mu_1$ und $\mu_{j-i+1} \geq \lambda_n$.
Hinweis: Folgern Sie die Aussagen mit Hilfe von Satz 1.1.6.

H 5 Beweisen Sie die Aussage des Satzes 1.1.8: Sei A diagonalähnlich und

$$U = (u_1, \ldots, u_n)$$

ein vollständiges Eigenvektorsystem von A. Ferner sei eine beliebige Matrix B gegeben. Dann gibt es zu jedem Eigenwert $\lambda_i(B)$ einen Eigenwert $\lambda_{j(i)}(A)$ so, daß gilt

$$|\lambda_{j(i)}(A) - \lambda_i(B)| \leq \mathrm{cond}_{\|\cdot\|_2}(U)\|B - A\|_2.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Beweisskizze aus dem Skript und ersetzen Sie die $\|\cdot\|_\infty$ Norm durch die $\|\cdot\|_2$ Norm.

H 6 Die Singulärwerte einer $n \times n$-Matrix A sind definiert als Wurzeln der Eigenwerte der Matrix $A^H A$. Seien A und $\tilde{A}$ aus $\mathbb{C}^{N\times N}$ und $\sigma_i, \tilde{\sigma}_i$ die dazugehörigen Singulärwerte für $1 \leq i \leq N$. Zeigen Sie:

$$|\sigma_i - \tilde{\sigma}_i| \leq \left|\left|A - \tilde{A}\right|\right|_2 \quad 1 \leq i \leq N$$

Hinweis: Bestimmen Sie σ_i^2 mit dem Minimaxprinzip bezüglich der Matrix $A^H A$. Versuchen Sie dann mit

$$\frac{||Ax||_2}{||x||_2} \leq ||A - \tilde{A}||_2 + \frac{||\tilde{A}x||_2}{||x||_2}$$

σ_i nach oben abzuschätzen, sodaß sich die geforderte Ungleichung ohne Betragstriche ergibt. Vertauschen Sie dann die Rolle von A und $\tilde{A}$.

Numerische Lineare Algebra
Übung 2, Lösungsvorschlag

Präsenzübung

Ü 3 Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ beide hermitisch und $\lambda_i(A), \lambda_j(B)$ die dazugehörigen Eigenwerte mit

$$\lambda_1(A) \geq ... \geq \lambda_n(A), \qquad \lambda_1(B) \geq ... \geq \lambda_n(B).$$

Man beweise mit Hilfe des Courant'schen Minimaxprinzips die Aussage von Satz 1.1.7

$$|\lambda_i(A) - \lambda_i(B)| \;\leq\; \rho(B - A).$$

Hinweis: Man schreibe $B = A+C$ mit $C = B-A$ und versuche mit dem Minimaxprinzip, angewendet auf $A + C$, die Ungleichung

$$\lambda_i(B) \leq \lambda_i(A) + \rho(C)$$

zu zeigen. Dann vertausche man die Rollen von A und B.

Weil B hermitisch ist gilt,

$$\begin{aligned} \lambda_i(B) &= \min_{V\in\mathcal{V}_{i-1}} \max\left\{R(x,B):\; x\neq 0, x^Hv = 0 \quad \forall v\in V\right\} \\ &\leq \max\left\{R(x,B):\; x\neq 0, x^Hv = 0 \quad \forall v\in \tilde{V}\right\} \end{aligned}$$

für ein beliebiges $\tilde{V}$.
Wegen $B = A + C$ und $R(x;B) = R(x;A) + R(x;C)$ folgt

$$\begin{aligned} \lambda_i(B) &\leq \max\left\{R(x;A):\; x\neq 0, x^Hv = 0 \quad \forall v\in \tilde{V}\right\} \\ &\quad + \max\left\{R(x;C):\; x\neq 0, x^Hv = 0 \quad \forall v\in \tilde{V}\right\} \\ &\leq \max\left\{R(x;A):\; x\neq 0, x^Hv = 0 \quad \forall v\in \tilde{V}\right\} + \max_{y\in\mathbb{C}^n}\left\{R(y;C)\right\}. \end{aligned}$$

Weil C hermitisch ist, gilt

$$\max_{y\in\mathbb{C}^n}\left\{R(y;C)\right\} \leq \rho(C)$$

und weil $\tilde{V} \in \mathcal{V}_{i-1}$ beliebig wählbar war folgt

$$\lambda_i(B) \leq \lambda_i(A) + \rho(C) \quad \Rightarrow \quad \lambda_i(B) - \lambda_i(A) \leq \rho(C).$$

Vertauschen wir B und A, erhält man

$$\lambda_i(A) - \lambda_i(B) \leq \rho(A - B) = \rho(B - A)$$

und ist fertig.

Ü 4 **a)** Sei $A = \text{Blockdiag}(D_1, ..., D_N)$ eine Blockdiagonalmatrix deren Diagonalblöcke D_i quadratische Matrizen sind. Zeigen Sie: Jeder Eigenwert von A ist Eigenwert eines D_i und umgekehrt (d.h.u.a. die Vielfachheit eines mehrfach auftretenden Eigenwertes summiert sich)

b) Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10^{-5} & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

bestimme man mit Hilfe von Abschätzungen für Eigenwerte gestörter Matrizen die Eigenwerte bis auf einen Fehler von 10^{-5}.
Hinweis: Betrachten Sie mit einer Matrix B die Differenz $B - A$.

a) *Es gibt unitäre Matrizen U_i mit $U_i^H D_i U_i = R_i$, wobei R_i obere Dreiecksmatrizen sind (Satz von Schur). Mit der untären Blockmatrix:*

$$U = \mathit{Blockdiag}(U_1, ..., U_N)$$

erhalten wir durch Transformation:

$$U^H A U = \mathit{Blockdiag}(R_1, ..., R_N)$$

Die rechte Seite der Gleichung ist eine obere Dreiecksmatrix mit allen Eigenwerten auf der Diagonalen.

b) *Setzen wir:*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$|\lambda_i(B) - \lambda_i(A)| \leq \rho(B - A) \leq ||B - A||_\infty \leq 10^{-5}$$

Auf B können wir Teil a) anwenden und die Eigenwerte konkret ausrechnen.

$$\begin{array}{lll} \textit{erster Block} & \Rightarrow & \lambda_1(B) = 0, \quad \lambda_2(B) = 3 \\ \textit{zweiter Block} & \Rightarrow & \lambda_3(B) = 1, \quad \lambda_4(B) = 4 \end{array}$$

Ü 5 (**Transformation auf Hessenberg bzw. Tridiagonalgestalt**)
Transformieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 8 \\ -6 & 15 & 10 \\ 8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

durch eine unitäre Ähnlichkeitstransformation auf Hessenberg- und damit Tridiagonalgestalt.

Da die Matrix hermitisch ist und unter einer unitären Ähnlichkeitstransformation auch hermitisch bleibt, ist die Hessenberform hier tridiagonal. Es genügt ein Schritt zur Transformation auf HESSENBERG*gestalt, die wegen der Symmetrie von A mit der gewünschten Tridiagonalgestalt übereinstimmt. Dabei ist $j = 1$ und $n = 3$, außerdem $A_1 = A$.*

Für U_1 werden β_1 und $\hat{w}_1$ benötigt, um $\binom{\alpha_{21}}{\alpha_{31}} = \binom{-6}{8}$ zu transformieren. Mit

$$\sigma_1 = \sqrt{\sum_{k=j+1}^{n} |\alpha_{kj}^{(j)}|^2} = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$$

ist

$$\beta_1 = \frac{1}{\sigma_1(\sigma_1 + |\alpha_{21}^{(1)}|)} = \frac{1}{10(10+6)} = \frac{1}{160}$$

und

$$\hat{w}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{pmatrix} - \sigma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Von der Transformation $A_2 = U_1 A U_1$ mit

$$A_2 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \hat{U}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \hat{U}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\hat{U}_1 \\ \hat{U}_1 A_{21} & \hat{U}_1 A_{22} \hat{U}_1 \end{pmatrix}$$

sind bereits $A_{11} = 1$ und $\hat{U}_1 A_{21} = \sigma_1 \binom{1}{0} = \binom{10}{0}$ bekannt. Die Symmetrie von A liefert $A_{12}\hat{U}_1 = (10, 0)$, so daß nur $\hat{U}_1 A_{22} \hat{U}_1$ zu bestimmen ist:

$$\begin{aligned}
\hat{U}_1 A_{22} \hat{U}_1 &= (I - \beta_1 \hat{w}_1 \hat{w}_1^H) A_{22} (I - \beta_1 \hat{w}_1 \hat{w}_1^H) \\
&= \left(I - \frac{1}{160} \begin{pmatrix} -16 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -16 & 8 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 15 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \\
&\quad \cdot \left(I - \frac{1}{160} \begin{pmatrix} -16 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -16 & 8 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 18 & 11 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 21 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Insgesamt ist somit

$$A_2 = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 10 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 21 \end{pmatrix}.$$

Hausübung

H 4 Sei A eine hermitische $n \times n$ Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Zeigen Sie, daß für jede Hauptuntermatrix

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_{ii} & \cdots & \alpha_{ij} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{ji} & \cdots & \alpha_{jj} \end{pmatrix}$$

mit $1 \leq i < j \leq n$ gilt:

a) B besitzt reelle Eigenwerte $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_{j-i+1}$.

b) Es gelten die Ungleichungen $\lambda_1 \geq \mu_1$ und $\mu_{j-i+1} \geq \lambda_n$.
Hinweis: Folgern Sie die Aussagen mit Hilfe von Satz 1.1.6.

a) Die Hauptuntermatrizen sind (wie A) hermitisch, besitzen also reelle Eigenwerte.

b) Für μ_{j-i+1} gilt $\mu_{j-i+1} = \min_{y\neq 0} \frac{y^H By}{y^H y}$. Erweitert man den Vektor y durch 0en auf die Dimension n in der Form $\tilde{x} = (\underbrace{0,\ldots,0}_{i-1}, y^H, \underbrace{0,\ldots,0}_{n-j})^H$, so gilt

$$\lambda_n = \min_{x\neq 0} \frac{x^H Ax}{x^H x} \leq \min_{\tilde{x}\neq 0} \frac{\tilde{x}^H A\tilde{x}}{\tilde{x}^H \tilde{x}} = \min_{y\neq 0} \frac{y^H By}{y^H y} = \mu_{j-i+1}$$

Analog zeigt man $\mu_1 \leq \lambda_1$.

H 5 Beweisen Sie die Aussage des Satzes 1.1.8: Sei A diagonalähnlich und

$$U = (u_1, \ldots, u_n)$$

ein vollständiges Eigenvektorsystem von A. Ferner sei eine beliebige Matrix B gegeben. Dann gibt es zu jedem Eigenwert $\lambda_i(B)$ einen Eigenwert $\lambda_{j(i)}(A)$ so, daß gilt

$$|\lambda_{j(i)}(A) - \lambda_i(B)| \leq \mathrm{cond}_{\|\cdot\|_2}(U)\|B - A\|_2.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Beweisskizze aus dem Skript und ersetzen Sie die $\|\cdot\|_\infty$ Norm durch die $\|\cdot\|_2$ Norm.

O.B.d.A. sei $\lambda_i(B) \neq \lambda_j(A)$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$. Sonst ist die Behauptung trivial. Sei $x \neq 0$ ein Eigenvektor zu $\lambda_i(B)$. Dann kann man x darstellen als

$$x = (\lambda_i(B)I - A)^{-1}(B - A)x.$$

Eine Normabschätzung ergibt

$$\|x\|_2 \leq \|(\lambda_i(B)I - A)^{-1}\|_2 \|(B - A)\|_2 \|x\|_2$$

und somit

$$1 \le \|(\lambda(B)I - A)^{-1}\|_2 \|(B - A)\|_2.$$

Da A diagonalisierbar ist folgt

$$\begin{aligned}
1 &\le \|(\lambda_i(B)UU^{-1} - U\Lambda_A U^{-1})^{-1}\|_2 \|(B-A)\|_2 \\
1 &\le \|(U(\lambda_i(B)I - \Lambda_A)U^{-1})^{-1}\|_2 \|(B-A)\|_2 \\
1 &\le \|U\|_2 \|(\lambda_i(B)I - \Lambda_A)^{-1}\|_2 \|U^{-1}\|_2 \|(B-A)\|_2 \\
1 &\le cond_{\|\cdot\|_2}(U) \|(\lambda_i(B)I - \Lambda_A)^{-1}\|_2 \|(B-A)\|_2
\end{aligned}$$

Die Norm der Diagonalmatrix ist gegeben durch

$$\|(\lambda_i(B)I - \Lambda_A)^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min_{j(i)} |\lambda_i(B) - \lambda_{j(i)}(A)|}.$$

Somit folgt die Behauptung

$$\min_i |\lambda_i(B) - \lambda_{j(i)}(A)| \le cond_{\|\cdot\|_2}(U) \|(B-A)\|_2.$$

H 6 Die Singulärwerte einer $n \times n$-Matrix A sind definiert als Wurzeln der Eigenwerte der Matrix $A^H A$. Seien A und $\tilde{A}$ aus $\mathbb{C}^{N\times N}$ und $\sigma_i, \tilde{\sigma}_i$ die dazugehörigen Singulärwerte für $1 \le i \le N$. Zeigen Sie:

$$|\sigma_i - \tilde{\sigma}_i| \le \left|\left|A - \tilde{A}\right|\right|_2 \quad 1 \le i \le N$$

<u>Hinweis:</u> Bestimmen Sie σ_i^2 mit dem Minimaxprinzip bezüglich der Matrix $A^H A$. Versuchen Sie dann mit

$$\frac{||Ax||_2}{||x||_2} \quad \le \quad ||A - \tilde{A}||_2 + \frac{||\tilde{A}x||_2}{||x||_2}$$

σ_i nach oben abzuschätzen, sodaß sich die geforderte Ungleichung ohne Betragstriche ergibt. Vertauschen Sie dann die Rolle von A und $\tilde{A}$.

σ_i^2 ist Eigenwert der hermitischen Matrix $A^H A$. Nach dem Minimaxprinzip folgt:

$$\sigma_i^2 \quad = \quad \min_{V \in \mathcal{V}_{i-1}} \max \left\{ R(x; A^H A), \;\; x \neq 0, \;\; x^H v = 0 \quad \forall v \in V \right\}$$

wobei:

$$R(x; A^H A) \; = \; \frac{x^H A^H A x}{x^H x} \; = \; \frac{||Ax||_2^2}{||x||_2^2.}$$

Weil alle σ_i nichtnegativ sind, folgt:

$$\sigma_i \quad = \quad \min_{V \in \mathcal{V}_{i-1}} \max \left\{ \frac{||Ax||_2}{||x||_2}, \;\; x \neq 0, \;\; x^H v = 0 \quad \forall v \in V \right\}.$$

Sei jetzt $V \in \mathcal{V}_{i-1}$ *beliebig und* $x^H v = 0\ \forall v \in V$ *sowie* $x \neq 0$. *Es gilt:*

$$\frac{||Ax||_2}{||x||_2} \quad \leq \quad ||A - \tilde{A}||_2 + \frac{||\tilde{A}x||_2}{||x||_2}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} &\max\left\{\frac{||Ax||_2}{||x||_2},\ \ x \neq 0,\ \ x^H v = 0\ \ \forall v \in V\right\} \\ &\leq\ ||A - \tilde{A}||_2 + \max\left\{\frac{||\tilde{A}x||_2}{||x||_2},\ \ x \neq 0,\ \ x^H v = 0\ \ \forall v \in V\right\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_i \quad \leq \quad ||A - \tilde{A}||_2 + \max\left\{\frac{||\tilde{A}x||_2}{||x||_2},\ \ x \neq 0,\ \ x^H v = 0 \quad \forall v \in V\right\}$$

und weil $V \in \mathcal{V}_{i-1}$ *beliebig war, folgt:*

$$\sigma_i \leq ||A - \tilde{A}||_2 + \tilde{\sigma}_i \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_i - \tilde{\sigma}_i \leq ||A - \tilde{A}||_2.$$

Mit vertauschen von A *und* $\tilde{A}$, *ergibt sich die Betragsungleichung.*