Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Sommersemester 09

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

20.4.2009

Numerische lineare Algebra
Übung 1

Präsenzübung

Ü 1 (*Verschärfung des Satzes von Gerschgorin*)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie mit dem Kreissatz von Gerschgorin Näherungen für die Eigenwerte der Matrix A.

b) Transformieren Sie A mit einer Diagonalmatrix $D = (1, \alpha, \alpha^2)$ und einem geeigneten $\alpha \neq 0$ so auf eine Matrix $B = D^{-1}AD$, daß der Kreis um 1 isoliert wird. Wie lautet die so erhaltene Abschätzung für den Eigenwert nahe 1?

Ü 2 Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

a) Man bestimme den Eigenwert zum Eigenvektor $(1, 1, 1)^T$.

b) Sei

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A - B$.

c) Berechnen Sie den kleinsten relativen Fehler

$$\alpha = \min \left\{ \frac{||y - x||_2}{||x||_2} : \ x = (1, 1, 1)^T, \ y \text{ Eigenvektor von } A - B \right\}$$

und vergleichen Sie diesen Wert mit der größtmöglichen relativen Störung des in a) errechneten Eigenwertes. Was passiert mit den Eigenwerten und Eigenvektoren von A und $A - B$ für $\varepsilon \to 0$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Hausübung

H 1 (*Verschärfung des Satzes von Gerschgorin*)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie mit dem Kreissatz von Gerschgorin Näherungen für die Eigenwerte der Matrix A.

b) Transformieren Sie A mit einer Diagonalmatrix $D = (\alpha, 1, \beta)$ mit $\alpha, \beta \neq 0$ so, daß die Gerschgorin-Kreise von $B = D^{-1}AD$ voneinander getrennt sind. Welche Abschätzungen für die Eigenwerte von A erhalten Sie?

c) Zeigen Sie, daß die Matrix A nur reelle Eigenwerte besitzt, ohne die Eigenwerte explizit zu bestimmen.

H 2 Zeigen Sie mit Hilfe des Kreissatzes von Gerschgorin:

a) Eine symmetrische, strikt diagonaldominante Matrix ist **genau dann** positiv definit, wenn alle Diagonalelemente positiv sind.

b) Eine symmetrische, invertierbare, diagonaldominante (aber nicht unbedingt strikt diagonaldominante) Matrix ist **genau dann** positiv definit, wenn alle Diagonalelemente positiv sind.

H 3 Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $S \in \mathbb{R}^{r \times r}$ beide symmetrisch. $Q_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$ erfülle

$$Q_1^T Q_1 = I .$$

Man setze

$$E_1 = AQ_1 - Q_1 S$$

und zeige: zu jedem der r Eigenwerte von S, $\lambda_1(S), \ldots, \lambda_r(S)$ gibt es einen Eigenwert $\lambda_{j(i)}(A)$ von A mit

$$|\lambda_i(S) - \lambda_{j(i)}(A)| \leq \sqrt{2}||E_1||_2, \quad i = 1, \ldots, r .$$

Hinweis: Man ergänze Q_1 zu einem vollständigen Orthonormalsystem $Q = [Q_1, Q_2]$ und setze

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} S & O \\ O & Q_2^T A Q_2 \end{pmatrix} + E = B + E$$

wende dann Satz 1.1.7 an und schätze dann $||E||_2$ mit Hilfe der Definition der Matrixnorm ab.

Numerische lineare Algebra
Übung 1, Lösungsvorschlag

Präsenzübung

Ü 1 (*Verschärfung des Satzes von Gerschgorin*)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie mit dem Kreissatz von Gerschgorin Näherungen für die Eigenwerte der Matrix A.

b) Transformieren Sie A mit einer Diagonalmatrix $D = (1, \alpha, \alpha^2)$ und einem geeigneten $\alpha \neq 0$ so auf eine Matrix $B = D^{-1}AD$, daß der Kreis um 1 isoliert wird. Wie lautet die so erhaltene Abschätzung für den Eigenwert nahe 1?

a) *Da die Matrix A symmetrisch ist, macht es keinen Unterschied, ob man die Kreisradien über die Zeilen oder über die Spalten bildet. Es ist in beiden Fällen*

$$\mathcal{K}_1 = [0, 2], \qquad \mathcal{K}_2 = [2, 6], \qquad \mathcal{K}_3 = [6, 8].$$

Da sich diese drei Kreise berühren, liefert der Kreissatz von Gerschgorin *lediglich die Aussage, daß alle drei Eigenwerte im Intervall $[0, 2] \cup [2, 6] \cup [6, 8] = [0, 8]$ liegen. Aus Stetigkeitsgründen (die Kreise berühren sich jeweils nur in einem Punkt!) folgt sogar, daß $\lambda_1 \in \mathcal{K}_1$, $\lambda_2 \in \mathcal{K}_2$ und $\lambda_3 \in \mathcal{K}_3$ gilt.*

b) *Mit der angegebenen Transformation ist*

$$B = D^{-1}AD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 4 & \alpha \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 7 \end{pmatrix}.$$

Da die Vorzeichen der Elemente außerhalb der Diagonale für den Kreissatz keine Rolle spielt, kann man $\alpha > 0$ voraussetzen. Dies liefert folgende Gleichung (man betrachte Zeilenkreise und beachte, daß der Kreis um 7 einen kleineren Radius hat als der Kreis um 4):

$$\begin{aligned} 4 - \alpha - \frac{1}{\alpha} &> 1 + \alpha \\ 0 &> 2\alpha + \frac{1}{\alpha} - 3 \\ 0 &> 2\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 2\left(\alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(\alpha - \frac{3}{4}\right)^2\right] - \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} &> \left(\alpha - \frac{3}{4}\right)^2 \end{aligned}$$

Die Lösung dieser quadratischen Ungleichung lautet $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} < \alpha < \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \alpha < 1$. Bei der Wahl $\alpha = 1$ entspricht die Matrix B gerade der Matrix A (bei der sich ja die

Kreise um 1 und 4 berühren) während die Wahl α nah bei $\frac{1}{2}$ eine bessere Abschätzung liefert. Für $\alpha = \frac{1}{2}$ (genau genommen müßte man hier den rechten Grenzwert gegen dieses α betrachten, weil sich für jeden ein wenig größeren Wert die Kreise nicht berühren) bekommt man die optimale Abschätzung $\lambda_1 \in \left[1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Ü 2 Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

a) Man bestimme den Eigenwert zum Eigenvektor $(1,1,1)^T$.

b) Sei

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A - B$.

c) Berechnen Sie den kleinsten relativen Fehler

$$\alpha = \min \left\{ \frac{||y-x||_2}{||x||_2} : x = (1,1,1)^T,\ y \text{ Eigenvektor von } A - B \right\}$$

und vergleichen Sie diesen Wert mit der größtmöglichen relativen Störung des in a) errechneten Eigenwertes. Was passiert mit den Eigenwerten und Eigenvektoren von A und $A - B$ für $\varepsilon \to 0$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

a) *Offenbar ist der Eigenwert $1 + 2\varepsilon$.*

b) *$det(A - B - \lambda I) = (1-\lambda)^3 - 2(1-\lambda)\varepsilon^2 = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 2\varepsilon^2) = 0$, also*

- **i)** *$\lambda_1 = 1$ mit dem Eigenvektor $(1, 0, -1)^T$*
- **ii)** *$\lambda_2 = 1 + \varepsilon\sqrt{2}$ mit dem Eigenvektor $(1, \sqrt{2}, 1)^T$*
- **iii)** *$\lambda_3 = 1 - \varepsilon\sqrt{2}$ mit dem Eigenvektor $(1, -\sqrt{2}, 1)^T$*

c) *Wir erhalten für die drei Eigenvektoren:*

$$\begin{aligned} \min_\mu ||x - \mu(1,0,-1)^T||_2 &= \sqrt{3} \\ \min_\mu ||x - \mu(1,\sqrt{2},1)^T||_2 &= \sqrt{3/2 - \sqrt{2}} \\ \min_\mu ||x - \mu(1,-\sqrt{2},1)^T||_2 &= \sqrt{3/2 + \sqrt{2}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \alpha = 0.1691\ldots$ *Dieser Wert bleibt für alle ε konstant. Die Eigenwertstörung verhält sich anders:*

$$\frac{(1+2\varepsilon) - (1-\sqrt{2}\varepsilon)}{1+2\varepsilon} = \frac{(2+\sqrt{2})\varepsilon}{1+2\varepsilon} \to 0 \text{ mit } \varepsilon \to 0.$$

Bei beiden Matrizen $A(\varepsilon)$ und $(A-B)(\varepsilon)$ handelt es sich um geringe Störungen der Einheitsmatrix. Die Stetigkeit der Eigenwerte in Abängigkeit der Matrixelemente ist hier offensichtlich, genauso wie die Unstetigkeit der Eigenvektoren.

Hausübung

H 1 (*Verschärfung des Satzes von Gerschgorin*)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie mit dem Kreissatz von Gerschgorin Näherungen für die Eigenwerte der Matrix A.

b) Transformieren Sie A mit einer Diagonalmatrix $D = (\alpha, 1, \beta)$ mit $\alpha, \beta \neq 0$ so, daß die Gerschgorin-Kreise von $B = D^{-1}AD$ voneinander getrennt sind. Welche Abschätzungen für die Eigenwerte von A erhalten Sie?

c) Zeigen Sie, daß die Matrix A nur reelle Eigenwerte besitzt, ohne die Eigenwerte explizit zu bestimmen.

a) *Da die Matrix A nicht symmetrisch ist, macht es einen Unterschied, ob man die Kreisradien über die Zeilen oder über die Spalten bildet. Es ist*

$$\mathcal{K}_1 = U_6(15), \qquad \mathcal{K}_2 = U_2(8), \qquad \mathcal{K}_3 = U_6(1)$$

und

$$\tilde{\mathcal{K}}_1 = U_1(15), \qquad \tilde{\mathcal{K}}_2 = U_{12}(8), \qquad \tilde{\mathcal{K}}_3 = U_1(1).$$

Da sich die drei Kreise jeweils überscheiden, liefert der Kreissatz von Gerschgorin *lediglich die Aussage, daß alle drei Eigenwerte in*

$$(\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3) \cap (\tilde{\mathcal{K}}_1 \cup \tilde{\mathcal{K}}_2 \cup \tilde{\mathcal{K}}_3)$$

liegen.

b) *Mit der angegebenen Transformation ist*

$$B = D^{-1}AD = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 6 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & \frac{6}{\alpha} & 0 \\ \alpha & 8 & \beta \\ 0 & \frac{6}{\beta} & 1 \end{pmatrix}.$$

Betrachtet man entsprechende Spaltenkreise, so kommt man zu den Ungleichungen

$$\begin{aligned} 15 - |\alpha| &> 8 + \frac{6}{|\alpha|} + \frac{6}{|\beta|}, \\ 8 - \frac{6}{|\alpha|} - \frac{6}{|\beta|} &> 1 + |\beta|. \end{aligned}$$

Die Wahl $\alpha = \beta > 0$ liefert (beide Ungleichungen sind dann identisch)

$$15 - \alpha > 8 + \frac{12}{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 - 7\alpha + 12 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 < \alpha < 4.$$

Eine mögliche Lösung ist z. B. $\alpha = \beta = 3.5$ und die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 15 & \frac{12}{7} & 0 \\ 3.5 & 8 & 3.5 \\ 0 & \frac{12}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

mit den GERSCHGORIN-*Kreisen*

$$\tilde{\mathcal{K}}_1 = U_{3.5}(15), \qquad \tilde{\mathcal{K}}_2 = U_{24/7}(8), \qquad \tilde{\mathcal{K}}_3 = U_{3.5}(1).$$

Diese sind jeweils disjunkt, also gilt für die Eigenwerte $\lambda_1 \in \tilde{\mathcal{K}}_1 = U_{3.5}(15)$, $\lambda_2 \in \tilde{\mathcal{K}}_2 = U_{24/7}(8)$ und $\lambda_3 \in \tilde{\mathcal{K}}_3 = U_{3.5}(1)$.

c) *In jedem Kreis $\tilde{\mathcal{K}}_i$ aus b) liegt jeweils ein Eigenwert von A. Damit können keine komplex konjugierten Eigenwerte existieren (diese müßten beide im selben Kreis liegen!), somit also überhaupt keine komplexen Eigenwerte (denn bei einem komplexen Eigenwert $a + ib$ ist stets auch $a - ib$ ein Eigenwert), weshalb A nur reelle Eigenwerte besitzt.*

H 2 Zeigen Sie mit Hilfe des Kreissatzes von GERSCHGORIN:

a) Eine symmetrische, strikt diagonaldominante Matrix ist **genau dann** positiv definit, wenn alle Diagonalelemente positiv sind.

b) Eine symmetrische, invertierbare, diagonaldominante (aber nicht unbedingt strikt diagonaldominante) Matrix ist **genau dann** positiv definit, wenn alle Diagonalelemente positiv sind.

Grundlage dieser Aufgabe ist die Aussage, daß eine symmetrische Matrix **genau dann** *positiv definit ist, wenn alle ihre Eigenwerte positiv sind.*

a) *Bei einer strikt diagonaldominanten Matrix A gilt $|\alpha_{ii}| > \sum_{j \neq i} |\alpha_{ij}|$. Damit ist der Radius des* GERSCHGORIN-*Kreises um das Diagonalelement kleiner als die Entfernung des Kreismittelpunktes vom Ursprung, weshalb der Kreis entweder komplett in der negativen oder komplett in der positiven Halbebene der komplexen Zahlen liegt. Falls auch nur ein Diagonalelement negativ ist, existiert ein Kreis und damit eine Zusammenhangskomponente in der linken Halbebene, die einen Eigenwert enthalten muß. Daher sind* **genau** *die Matrizen (vom angegebenen Typ) positiv definit, die* **nur** *positive Diagonalelemente besitzen.*

b) *Für eine invertierbare, diagonaldominante Matrix argumentiert man ähnlich wie in Teil a), nur können nun Kreise durch den Ursprung gehen. Sobald ein Diagonalelement negativ ist, existiert ein Kreis und damit eine Zusammenhangskomponente, die komplett nicht in der rechten Halbebene liegt, also einen Eigenwert λ mit $\lambda \leq 0$ enthalten muß. Damit kann A nur positiv definit sein, wenn alle Diagonalelemente positiv sind. In diesem Fall bleibt noch der Eigenwert 0 auszuschließen, doch da die Matrizen regulär sind, besitzen sie nur von 0 verschiedene Eigenwerte.*

H 3 Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $S \in \mathbb{R}^{r\times r}$ beide symmetrisch. $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times r}$ erfülle

$$Q_1^T Q_1 = I \ .$$

Man setze

$$E_1 = AQ_1 - Q_1 S$$

und zeige: zu jedem der r Eigenwerte von S, $\lambda_1(S), \ldots, \lambda_r(S)$ gibt es einen Eigenwert $\lambda_{j(i)}(A)$ von A mit

$$|\lambda_i(S) - \lambda_{j(i)}(A)| \le \sqrt{2}||E_1||_2, \quad i = 1, \ldots, r \ .$$

Hinweis: Man ergänze Q_1 zu einem vollständigen Orthonormalsystem $Q = [Q_1, Q_2]$ und setze

$$Q^T AQ = \begin{pmatrix} S & O \\ O & Q_2^T AQ_2 \end{pmatrix} + E = B + E$$

wende dann Satz 1.1.7 an und schätze dann $||E||_2$ mit Hilfe der Definition der Matrixnorm ab.

Es gilt

$$Q^T AQ = \begin{pmatrix} Q_1^T AQ_1 & Q_1^T AQ_2 \\ Q_2^T AQ_1 & Q_2^T AQ_2 \end{pmatrix}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} Q_1^T AQ_1 &= S + Q_1^T E_1 \\ Q_2^T AQ_1 &= Q_2^T E_1 \end{aligned}$$

Nach der Definition von B ist also (wegen der Symmetrie)

$$E = \begin{pmatrix} Q_1^T E_1 & E_1^T Q_2 \\ Q_2^T E_1 & O \end{pmatrix} .$$

Die Eigenwerte von B sind diejenigen von S und $Q_2^T AQ_2$. Nach Satz 1.1.7 gilt bei absteigender Sortierung der Eigenwerte

$$|\lambda_i(A) - \lambda_i(B)| \le ||E||_2$$

Also gibt es für die r Eigenwerte von S eine Umnumerierung der Eigenwerte von A, sodaß die Behauptung bereits gilt mit $||E||_2$ statt $\sqrt{2}||E_1||$. Nun benutzen wir die Definition der Matrixnorm zur Abschätzung von $||E||$ und partitionieren zu diesem Zweck einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ entsprechend der Partitionierung von Q in $[y; z]$ mit

$$||x||_2^2 = 1 \Leftrightarrow ||y||_2^2 + ||z||_2^2 = 1$$

Damit unter Ausmultiplizieren von Ex und Ausnutzung der Orthonormalität von Q

$$\begin{aligned} ||E||_2 &= \max_{||x||_2=1} ||Ex||_2 \\ &= \max_{||x||_2=1} || \begin{pmatrix} Q_1^T E_1 y \\ Q_2^T E_1 y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_1^T Q_2 z \\ O \end{pmatrix} ||_2 \\ &\leq \max_{||x||_2=1} (||E_1||_2||y||_2 + ||E_1^T Q_2 z||_2 \\ &\leq \max_{||x||_2=1} ||E_1||_2(||y||_2 + ||z||_2) \\ &\leq \sqrt{2}||E_1||_2 \end{aligned}$$

Dabei wurde zuletzt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|a+b| \;=\; |(1,1)(a,b)^T| \;\leq\; \sqrt{1^2+1^2}\sqrt{a^2+b^2}$$

ausgenutzt.
Bem.: $Q_1^T A Q_1$ wird als matrizieller Rayleighquotient bezeichnet.