Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Sommersemester 09

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

20.4.2009

Numerische lineare Algebra
Übung 1

Präsenzübung

Ü 1 (*Verschärfung des Satzes von Gerschgorin*)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie mit dem Kreissatz von Gerschgorin Näherungen für die Eigenwerte der Matrix A.

b) Transformieren Sie A mit einer Diagonalmatrix $D = (1, \alpha, \alpha^2)$ und einem geeigneten $\alpha \neq 0$ so auf eine Matrix $B = D^{-1}AD$, daß der Kreis um 1 isoliert wird. Wie lautet die so erhaltene Abschätzung für den Eigenwert nahe 1?

Ü 2 Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

a) Man bestimme den Eigenwert zum Eigenvektor $(1, 1, 1)^T$.

b) Sei

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A - B$.

c) Berechnen Sie den kleinsten relativen Fehler

$$\alpha = \min\left\{ \frac{||y - x||_2}{||x||_2} : \; x = (1, 1, 1)^T, \; y \text{ Eigenvektor von } A - B \right\}$$

und vergleichen Sie diesen Wert mit der größtmöglichen relativen Störung des in a) errechneten Eigenwertes. Was passiert mit den Eigenwerten und Eigenvektoren von A und $A - B$ für $\varepsilon \to 0$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Hausübung

H 1 (*Verschärfung des Satzes von Gerschgorin*)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie mit dem Kreissatz von Gerschgorin Näherungen für die Eigenwerte der Matrix A.

b) Transformieren Sie A mit einer Diagonalmatrix $D = (\alpha, 1, \beta)$ mit $\alpha, \beta \neq 0$ so, daß die Gerschgorin-Kreise von $B = D^{-1}AD$ voneinander getrennt sind. Welche Abschätzungen für die Eigenwerte von A erhalten Sie?

c) Zeigen Sie, daß die Matrix A nur reelle Eigenwerte besitzt, ohne die Eigenwerte explizit zu bestimmen.

H 2 Zeigen Sie mit Hilfe des Kreissatzes von Gerschgorin:

a) Eine symmetrische, strikt diagonaldominante Matrix ist **genau dann** positiv definit, wenn alle Diagonalelemente positiv sind.

b) Eine symmetrische, invertierbare, diagonaldominante (aber nicht unbedingt strikt diagonaldominante) Matrix ist **genau dann** positiv definit, wenn alle Diagonalelemente positiv sind.

H 3 Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $S \in \mathbb{R}^{r\times r}$ beide symmetrisch. $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times r}$ erfülle

$$Q_1^T Q_1 \; = \; I \; .$$

Man setze

$$E_1 \; = \; AQ_1 - Q_1 S$$

und zeige: zu jedem der r Eigenwerte von S, $\lambda_1(S), \dots, \lambda_r(S)$ gibt es einen Eigenwert $\lambda_{j(i)}(A)$ von A mit

$$|\lambda_i(S) - \lambda_{j(i)}(A)| \; \leq \; \sqrt{2}||E_1||_2, \quad i = 1, \dots, r \; .$$

Hinweis: Man ergänze Q_1 zu einem vollständigen Orthonormalsystem $Q = [Q_1, Q_2]$ und setze

$$Q^T AQ \; = \; \begin{pmatrix} S & O \\ O & Q_2^T AQ_2 \end{pmatrix} + E \; = \; B + E$$

wende dann Satz 1.1.7 an und schätze dann $||E||_2$ mit Hilfe der Definition der Matrixnorm ab.