Definition des Maßintegrals

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei Maßraum

Schritt 1: Ist $h: \Omega \to \mathbb{R}$ nichtnegativ einfach, d.h.

$$h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot 1_{A_i}$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ Partition von Ω, so setzen wir

$$\int_\Omega h \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu(A_i).$$

Schritt 2: Ist $h: \Omega \to \mathbb{R}$ nichtnegativ messbar, d.h.

$$h(\omega) \geq 0 \quad (\omega \in \Omega) \qquad \text{und} \qquad h^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad (B \in \mathcal{B}),$$

so wählen wir nichtnegative einfache h_n mit $h_n \uparrow h$

(d.h. $h_1(\omega) \leq h_2(\omega) \leq \ldots \leq h_n(\omega) \xrightarrow{(n \to \infty)} h(\omega) \quad (\omega \in \Omega)$)

und setzen

$$\int_\Omega h \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega h_n \, d\mu.$$