1 Stetige Abbildungen auf dem $\mathbb{R}^n$

1 a.) Normen auf dem $\mathbb{R}^n$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Auf der Menge aller n–Tupel reeller Zahlen

$$\left\{x := (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\middle|\, x_i \in \mathbb{R},\ \ i = 1, \ldots, n\right\}$$

kann man eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahlen, (Skalaren), einführen, so daß diese Menge ein reeller Vektorraum wird:

$$\begin{aligned} x + y &:= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ cx &:= (cx_1, \ldots, cx_n)\,. \end{aligned}$$

Man bezeichnet diesen Vektorraum mit $\mathbb{R}^n$. Er hat die Dimension n. Eine Basis bilden zum Beispiel die n Vektoren

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ \ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ \ e_n = (0, \ldots, 0, 1)\,.$$

Ist V ein beliebiger Vektorraum, dann heißt eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+$ Norm auf V, wenn für alle $x, y \in V$ und $c \in \mathbb{R}$

(i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(ii) $\|cx\| = |c|\,\|x\|$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

gilt. Ein Vektorraum, auf dem eine Norm erklärt ist, heißt normierter Raum. Auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ kann man Normen auf verschiedene Weise erklären. Zwei wichtige Beispiele will ich betrachten:

1.) Die Maximumsnorm:

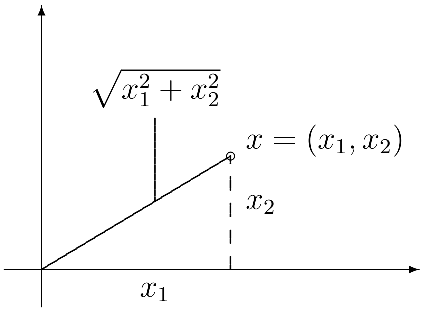
$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}\,.$$

Um zu zeigen, daß dies eine Norm ist, müssen die Eigenschaften (i) – (iii) nachgewiesen werden. Die Eigenschaften (i) und (ii) sind erfüllt. Es bleibt (iii) zu zeigen.
Es gibt ein i mit $\|x + y\|_\infty = |x_i + y_i|$. Damit folgt

$$\|x + y\|_\infty = |x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty\,.$$

2.) Die Euklidsche Norm:

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$



Mit dem **Skalarprodukt**

$$x \cdot y := x_1 \cdot y_1 + \ldots + x_n \cdot y_n$$

gilt hierfür auch

$$|x| = \sqrt{x \cdot x}\,.$$

(i) und (ii) sind klar. Es gleibt (iii) zu zeigen. Hierzu beweist man zuerst die **Cauchy–Schwarzsche Ungleichung**

$$|x \cdot y| \le |x|\,|y|\,.$$

Beweis der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung: Das quadratische Polynom in t

$$|x|^2 t^2 + 2x \cdot yt + |y|^2 = |tx + y|^2 \ge 0$$

kann keine zwei verschiedenen reellen Nullstellen haben, also muß für die Diskriminante

$$(x \cdot y)^2 - |x|^2\,|y|^2 \le 0$$

gelten. ∎

Beweis der Eigenschaft (iii):

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= (x+y)\cdot(x+y) = |x|^2 + 2x \cdot y + |y|^2 \\ &\le |x|^2 + 2|x \cdot y| + |y|^2 \\ &\le |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2\,, \end{aligned}$$

also

$$|x + y| \le |x| + |y|\,.$$

∎

Definition: Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Eine Folge $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$, heißt konvergent, wenn ein $a \in \mathbb{R}^n$ existiert mit

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - a\| = 0\,.$$

Man schreibt dann $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ und bezeichnet a als Grenzwert oder Grenzelement der Folge $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Wie im Fall des $\mathbb{R}^1$ beweist man, daß eine Folge nicht gegen zwei verschiedene Grenzwerte konvergieren kann.

Zur Definition der Konvergenz wird eine Norm benötigt. Trotzdem hängt der Konvergenzbegriff auf dem $\mathbb{R}^n$ nicht von der verwendeten Norm ab. Dies ergibt sich aus den folgenden Resultaten.

Lemma: Eine Folge $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$, konvergiert genau dann bezüglich der Maximumsnorm, wenn jede der n Komponentenfolgen $\{x_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$, $i = 1, \ldots, n$, konvergiert.

Beweis: Es gilt

$$|x_k^{(i)} - a^{(i)}| \le \|x_k - a\|_\infty \le |x_k^{(1)} - a^{(1)}| + \ldots + |x^{(n)} - a^{(n)}|\,.$$

■

Satz: Sei $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$, eine bezüglich der Maximumsnorm beschränkte Folge. (D. h. es existiert $c > 0$ mit $\|x_k\|_\infty \le c$ für alle $k \in \mathbb{N}$.) Dann besitzt $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine (bezüglich der Maximumsnorm) konvergente Teilfolge.

Beweis: Da jede der Komponentenfolgen $\{x_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$, $i = 1, \ldots, n$, beschränkt ist, besitzt jede dieser Folgen eine konvergente Teilfolge. Sei $\{x_{k(j)}^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}$ eine konvergente Teilfolge von $\{x_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$. Dann ist $\{x_{k(j)}^{(2)}\}_{j=1}^{\infty}$ eine Teilfolge von $\{x_k^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$, und besitzt eine konvergente Teilfolge $\{x_{k(j(\ell))}^{(2)}\}_{\ell=1}^{\infty}$. Auch $\{x_{k(j(\ell))}^{(1)}\}_{\ell=1}^{\infty}$ ist konvergent als Teilfolge von $\{x_{k(j)}^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}$. Setzt man das Verfahren fort so erhält man nach n–Schritten eine Teilfolge $\{x_{k_s}\}_{s=1}^{\infty}$ von $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, für die alle Komponentenfolgen konvergieren, und die also konvergent ist bezüglich der Maximumsnorm im $\mathbb{R}^n$. ■

Satz: Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ Normen auf $\mathbb{R}^n$. Dann existieren Konstanten $a, b > 0$ so daß für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$a\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le b\|x\|_1\,.$$

Beweis: Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumsnorm. Es genügt zu zeigen, daß Konstanten $a, b > 0$ existieren mit

$$\|x\| \le a\|x\|_\infty\,,\ \ \|x\|_\infty \le b\|x\|$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Die erste Abschätzung ergibt sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
\|x\| &= |x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n| \\
&\leq \|x_1e_1\| + \ldots + \|x_ne_n\| = |x_1|\,\|e_1\| + \ldots + |x_n|\,\|e_n\| \\
&\leq (\|e_1\| + \ldots + \|e_n\|)\,\|x\|_\infty = a\|x\|_\infty\,,
\end{aligned}$$

mit $a = \|e_1\| + \ldots + \|e_n\|$.

Die zweite Abschätzung beweist man durch Widerspruch: Angenommen, es gäbe keine solche Konstante $b > 0$. Dann könnte man für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in \mathbb{R}^n$ finden mit

$$\|x_k\|_\infty > k\|x_k\|\,.$$

Setze $y_k := \frac{x_k}{\|x_k\|_\infty}$. Für die Folge $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ gelten

$$\|y_k\| = \|\,\frac{x_k}{\|x_k\|_\infty}\,\| = \frac{1}{\|x_k\|_\infty}\,\|x_k\| < \frac{1}{k}$$

und

$$\|y_k\|_\infty = \left\|\,\frac{x_k}{\|x_k\|_\infty}\,\right\|_\infty = 1\,.$$

Nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß hat $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ somit eine Teilfolge $\{z_j\}_{j=1}^\infty$, $z_j = y_{kj}$, die bezüglich der Maximumsnorm konvergiert. Sei $z \in \mathbb{R}^n$ der Grenzwert. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \|z_k - z\|_\infty = 0\,,$$

also, wegen $\|z_k\|_\infty = 1$,

$$1 = \lim_{k\to\infty} \|z_k\|_\infty = \lim_{k\to\infty} \|z_k - z + z\|_\infty \leq \|z\|_\infty + \lim_{k\to\infty} \|z_k - z\|_\infty = |z|$$

also $z \neq 0$.
Andererseits gilt $\|z_j\| = \|y_{k_j}\| < \frac{1}{k_j} \leq \frac{1}{j}$, also

$$\begin{aligned}
\|z\| &= \|z - z_k + z_k\| = \lim_{k\to\infty} \|z - z_k + z_k\| \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \|z - z_k\| + \lim_{k\to\infty} \|z_k\| \\
&\leq a \lim_{k\to\infty} \|z - z_k\|_\infty + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0\,,
\end{aligned}$$

also $z = 0$. Widerspruch! ■

Wenn zwei Normen die Ungleichungen des eben bewiesenen Satzes erfüllen, sagt man, sie seien **äquivalent.** Auf dem $\mathbb{R}^n$ sind also alle Normen äquivalent. Hieraus ergibt sich unmittelbar, daß eine Folge, die bezüglich einer Norm gegen a konvergiert, auch bezüglich jeder anderen Norm gegen a konvergiert. Folglich hängt der Konvergenzbegriff nicht von der verwendeten Norm ab. Außerdem ergibt sich sofort , daß das obenstehende Lemma und der Satz nicht nur für die Maximumsnorm, sondern für alle Normen gelten.

Lemma: (Cauchysches Konvergenzkriterium) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Eine Folge $\{x_k\}_{k=1}^\infty$, $x_k \in \mathbb{R}^n$, ist konvergent, genau dann wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\|x_k - x_\ell\| < \varepsilon$$

für alle $k, \ell \geq k_0$.

Beweis: $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ ist eine Cauchyfolge im $\mathbb{R}^n$, genau dann wenn jede der Komponentenfolgen $\{x_k^{(i)}\}_{k=1}^\infty$ eine Cauchyfolge im $\mathbb{R}^1$ ist. Denn es existieren Konstanten $a, b > 0$ mit

$$a|x_k^{(i)} - x_\ell^{(i)}| \leq \|x_k - x_\ell\| \leq b\Big(|x_k^{(1)} - x_\ell^{(1)}| + \ldots + |x_k^{(n)} - x_\ell^{(n)}|\Big), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Also folgt die Aussage des Lemmas, aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium im $\mathbb{R}^1$.

■

Unendliche Reihen: Unter einer unendlichen Reihe $\sum_{k=1}^\infty x_k$, $x_k \in \mathbb{R}^n$, versteht man die Folge $\{s_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen $s_\ell = \sum_{k=1}^\ell x_k$. Falls $s = \lim_{\ell\to\infty} s_\ell$ existiert, heißt s die Summe der Reihe: $s = \sum_{k=1}^\infty x_k$. Eine Reihe heißt absolut konvergent, wenn

$$\sum_{k=1}^\infty \|x_k\|$$

konvergiert. Aus

$$\|\sum_{k=\ell}^m x_m\| \leq \sum_{k=\ell}^m \|x_k\|$$

und dem Cauchyschen Konvergenzkriterium folgt, daß eine absolut konvergente Reihe auch konvergiert. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht. Eine Reihe ist genau dann absolut konvergent, wenn jede ihrer Komponentenreihen absolut konvergiert. Hieraus folgt, daß eine absolut konvergente Reihe bei jeder Umordnung gegen dieselbe Summe konvergiert, da dies für die Komponentenreihen richtig ist.

1 b.) Topologie des $\mathbb{R}^n$

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

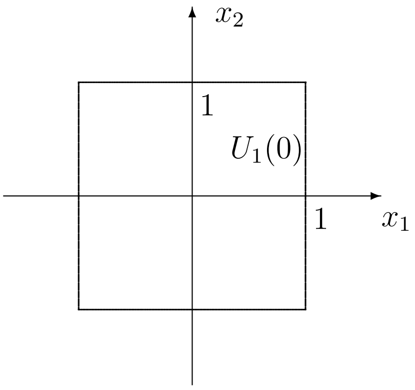
Definition: Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$. Die Menge

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x - a\| < \varepsilon\}$$

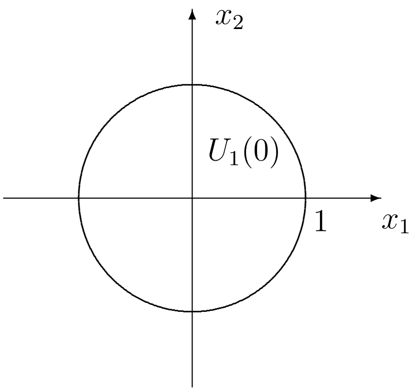
heißt offene ε–Umgebung von a bezüglich der Norm $\| \cdot \|$, oder Kugel um a mit Radius ε .
Eine Teilmenge U von $\mathbb{R}^n$ heißt Umgebung von $a \in \mathbb{R}^n$, wenn U eine ε–Umgebung von a enthält.
Die Menge $U_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\| < 1\}$ heißt offene Einheitskugel bezüglich der Norm $\| \cdot \|$.

Im $\mathbb{R}^2$ kann man sich die Form der „Einheitskugel“ für verschiedene Normen veranschaulichen:

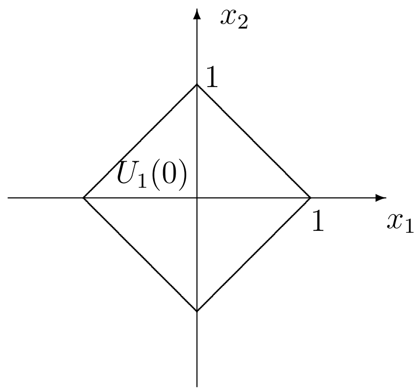
Maximumsnorm: $\| \cdot \|_\infty$



Euklidsche Norm: $| \cdot |$



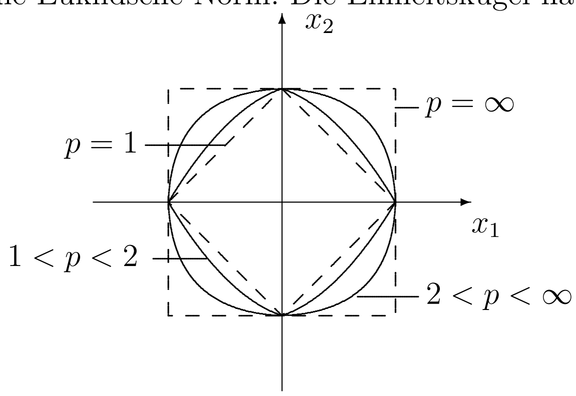
Auch $\|x\|_1 := |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$ ist eine Norm. Der Beweis wird dem Leser überlassen.
Für diese Norm hat die Einheitskugel folgende Form



Allgemein wird für jedes $p \geq 1$ eine Norm definiert durch

$$\|x\|_p := (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}\,.$$

Für $p = 2$ ergibt sich die Euklidsche Norm. Die Einheitskugel hat folgende Form



Der Umgebungsbegriff hängt nicht von der verwendeten Norm ab. Denn seien $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ Normen auf $\mathbb{R}^n$, sei $a \in \mathbb{R}^n$. Aus der Äquivalenz der Normen

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1$$

folgt, daß jede ε–Umgebung $U_\varepsilon(a) = \{x \,\big|\, \|x - a\|_1 < \varepsilon\}$ bezüglich $\|\cdot\|_1$ die $c_1\varepsilon$–Umgebung

$$V_{c_1\varepsilon}(a) = \left\{x \,\Big|\, \|x - a\|_2 < c_1\varepsilon\right\}$$

bezüglich $\|\cdot\|_2$ enthält. Also ist $U_\varepsilon(a)$ Umgebung von a bezüglich der $\|\cdot\|_2$ Norm, und somit ist jede Umgebung von a bezüglich $\|\cdot\|_1$ auch Umgebung bezüglich $\|\cdot\|_2$ und umgekehrt.

Definition: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heißt innerer Punkt von M, wenn es eine Umgebung von x gibt, die in M enthalten ist, d.h. wenn M Umgebung von x ist.

$x \in \mathbb{R}^n$ heißt Häufungspunkt von M, wenn in jeder Umgebung von x ein Punkt von M liegt, der von x verschieden ist.

$x \in \mathbb{R}^n$ heißt Randpunkt von M, wenn in jeder Umgebung von x mindestens ein Punkt von M und ein Punkt des Komplementes $\mathbb{R}^n \backslash M$ liegt.

Eine Menge heißt offen, wenn sie nur aus inneren Punkten besteht. Eine Menge heißt abgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.

Wie in $\mathbb{R}^1$ beweist man:
Das Komplement einer offenen Menge ist abgeschlossen, das Komplement einer abgeschlossenen Menge ist offen. Die Vereinigung eines beliebigen Systems offener Mengen ist offen, der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist offen. Der Durchschnitt eines beliebigen Systems abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen, die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Als Durchmesser von M bezeichnet man die Zahl

$$\delta(M) := \sup_{y,x \in M} \|y - x\| .$$

Satz: Sei $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von abgeschlossenen nichtleeren Mengen $A_k \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $A_{k+1} \subseteq A_k$ und

$$\lim_{k \to \infty} \delta(A_k) = 0 .$$

Dann existiert $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{x\} .$$

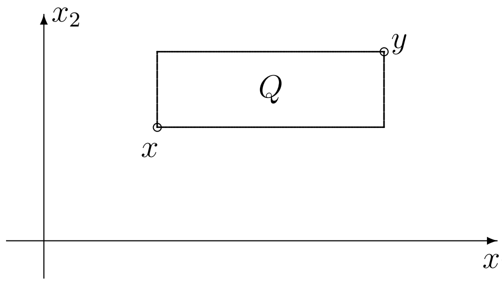
Beweis: Wähle $x_k \in A_k$. Die Folge $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ ist dann eine Cauchyfolge, weil $x_{k+\ell} \subseteq A_{k+\ell} \subseteq A_k$, also $\|x_k - x_{k+\ell}\| \leq \delta(A_k) \to 0$.
Der Grenzwert von $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ sei x. Es gilt $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. Denn wenn $k \in \mathbb{N}$ existieren würde mit $x \notin A_k$, dann würde eine Umgebung $U_\varepsilon(x)$ existieren mit $U_\varepsilon(x) \cap A_k = \emptyset$, also auch $U_\varepsilon(x) \cap A_\ell = \emptyset$ für alle $\ell \geq k$, wegen $A_\ell \subseteq A_k$, also $\|x - x_\ell\| \geq \varepsilon$ für alle $\ell \geq k$, im Widerspruch zur Annahme daß x Grenzwert von $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ sei.

Sei $y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. Dann gilt $\|y - x\| \leq \delta(A_k)$ für alle k, also $\|y - x\| = \lim_{k\to\infty} \|y - x\| \leq \lim_{k\to\infty} \delta(A_k) = 0$, also $x = y$. Somit gilt

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{x\} .$$

$\blacksquare$

Kompakte Mengen. Kompakte Mengen werden im $\mathbb{R}^n$ wie im $\mathbb{R}^1$ definiert und es gelten entsprechende Aussagen. Um dies zu zeigen, müssen noch zwei weitere Begriffe eingeführt werden:
Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann bezeichnet man die Menge $\left\{z \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_i \le z_i \le y_i\,,\;\; i = 1, \dots, n\right\}$ als abgeschlossenen Quader. Ist $y_1 - x_1 = y_2 - x_2 = \dots = y_n - x_n = a \ge 0$, dann bezeichnet man diese Menge als Würfel mit Kantenlänge a.



Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Ein Mengensystem $\mathcal{U}$ aus offenen Mengen im $\mathbb{R}^n$ mit $M \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$ heißt offene Überdeckung von M.

Satz: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:

(1) M ist beschränkt und abgeschlossen

(2) Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von M. Dann gibt es endlich viele Mengen $U_i \in \mathcal{U}$, $i = 1, \dots, m$ mit $M \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_i$

(3) Jede unendliche Teilmenge von M besitzt einen Häufungspunkt in M.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): Angenommen, es gäbe eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$, so daß (2) nicht richtig ist. Da M beschränkt ist, kann M in einen abgeschlossenen Würfel W eingeschlossen werden. Man unterteile diesen Würfel nun in 2^n Würfel mit der halben Kantenlänge. Nach Annahme gilt für wenigstens einen dieser kleineren Würfel, daß sein Durchschnitt mit M nicht durch endlich viele Mengen aus $\mathcal{U}$ überdeckt werden kann. W_1 sei einer dieser Würfel. Nun unterteile man W_1 und konstruiere analog W_2. Dies gibt eine Folge $\{W_k\}_{k=1}^\infty$ von abgeschlossenen Würfeln mit

1.) $W \supseteq W_1 \supseteq W_2 \supseteq \dots$

2.) $\lim\limits_{k \to \infty} \delta(W_k) = 0$

3.) $M \cap W_k$ kann nicht durch endlich viele Mengen aus $\mathcal{U}$ überdeckt werden.

Die Folge $\{M \cap W_k\}_{k=1}^\infty$ erfüllt die Voraussetzungen des vorangehenden Satzes, also existiert $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$x \in \bigcap_{k=1}^\infty (M \cap W_k)\,.$$

Wegen $x \in M$ gibt es $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$. U ist offen, enthält also eine ε–Umgebung von x . Wegen $\lim_{k\to\infty} \delta(W_k) = 0$ und $x \in W_k$ ist daher $M \cap W_k \subseteq W_k \subseteq U$ für alle genügend großen k , also genügt zur Überdeckung von $M \cap W_k$ bereits eine einzige Menge $U \in \mathcal{U}$, im Widerspruch zu 3.). Also muß (2) richtig sein.

(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $A \subseteq M$ eine Menge, die keine Häufungspunkte in M besitzt. Dann ist kein Punkt von M Häufungspunkt von A , also gibt es zu jedem $x \in M$ eine offene Umgebung, die außer möglicherweise x selbst keinen Punkt aus A enthält. Die Menge dieser Umgebungen bildet eine offene Überdeckung von M , also genügen endlich viele derartige Umgebungen zur Überdeckung von M . Da jede dieser Umgebungen höchstens einen Punkt aus A enthält, muß A endlich sein. Eine unendliche Teilmenge A muß also einen Häufungspunkt in M haben.

(3) $\Rightarrow$ (1): Wäre M nicht beschränkt, dann gäbe es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in M$ mit

$$\|x_k\| \geq k \, .$$

Sei A die Menge dieser Punkte. A ist unendliche Teilmenge von M , hat aber keinen Häufungspunkt. Denn wäre y Häufungspunkt, dann müßte es unendlich viele $x \in A$ geben mit

$$\|x - y\| < 1 \, , \quad \text{also} \quad \|x\| = \|x - y + y\| \leq 1 + \|y\| \, ,$$

im Widerspruch zur Konstruktion von A . Also muß M beschränkt sein.

Wäre M nicht abgeschlossen, dann gäbe es einen Häufungspunkt $x \in \mathbb{R}^n$ von M , der nicht zu M gehört, und es gäbe zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in M$ mit $\|x_k - x\| < \frac{1}{k}$. Die Folge $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergiert gegen x , hat also x als einzigen Häufungspunkt, also müßte x nach Voraussetzung zu M gehören, im Widerspruch zur Annahme. ■

Definition: Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt kompakt, wenn sie eine der drei Eigenschaften (und damit alle drei Eigenschaften) des vorangehenden Satzes hat.

Wie im $\mathbb{R}^1$ beweist man:

Satz: Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt, genau dann wenn jede Folge in M eine konvergente Teilfolge besitzt mit Grenzwert in M .

Mengen mit dieser Eigenschaft heißen **folgenkompakt**. Im $\mathbb{R}^n$ sind also Kompaktheit und Folgenkompaktheit äquivalente Begriffe. Klar ist auch:

Satz: Jede beschränkte unendliche Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ hat mindestens einen Häufungspunkt.

1 c.) Stetige Abbildungen vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge. Ich betrachte nun Abbildungen $f : D \to \mathbb{R}^m$. Derartige Abbildungen heißen „Funktionen von n Variablen“.

Für $x \in D$ seien $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ die Komponenten von $f(x) \in \mathbb{R}^m$. Hierdurch werden Abbildungen

$$f_i : D \to \mathbb{R}\,, \quad i = 1, \dots, m$$

definiert. Umgekehrt seien m Abbildungen $f_1, \dots, f_m : D \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann wird durch

$$x \mapsto f(x) := \Big(f_1(x), \dots, f_m(x)\Big)$$

eine Abbildung

$$f : D \to R^m$$

definiert. Jede Abbildung $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, wird also beschrieben durch m – Abbildungsgleichungen

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots & & \\ y_m & = & f_m(x_1, \dots, x_n) \end{array}\,, \quad x \in D\,.$$

Beispiele:

1.) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und es gelte für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ f(cx) &= cf(x)\,. \end{aligned}$$

Dann heißt f linear. In der linearen Algebra wird gezeigt, daß zu jeder linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine eindeutige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}\,,$$

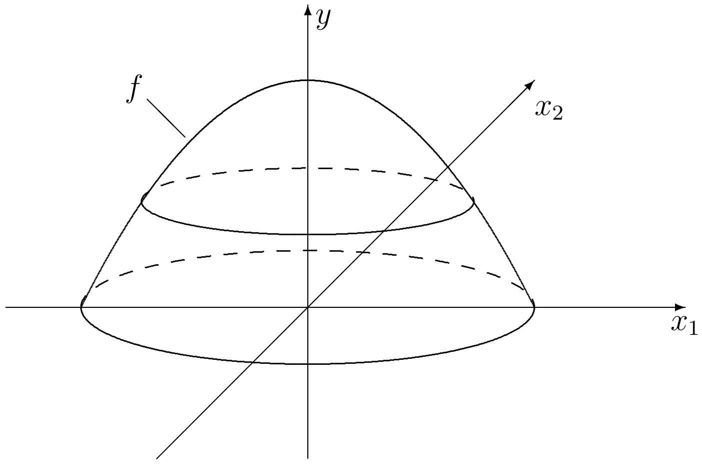
existiert mit

$$f(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + \dots + & a_{1n}x_n \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & + \dots + & a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

2.) Sei $n = 2$, $m = 1$, $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, |x| < 1\}$. Sei

$$f : D \to \mathbb{R}\,,$$

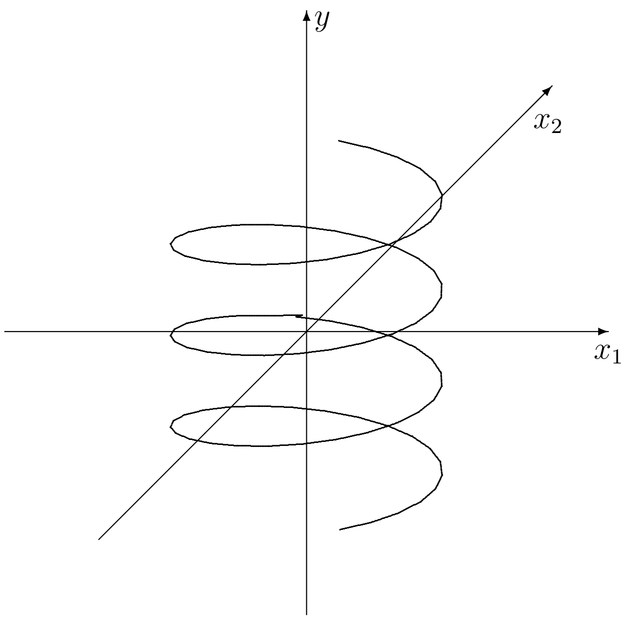
$$f(x) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$$



„oberer Teil der Einheitsphäre“.

3.) Jede Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ heißt Weg im $\mathbb{R}^m$. Zum Beispiel sei für $t \in \mathbb{R}$

$$t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$$



„Spiralfeder“

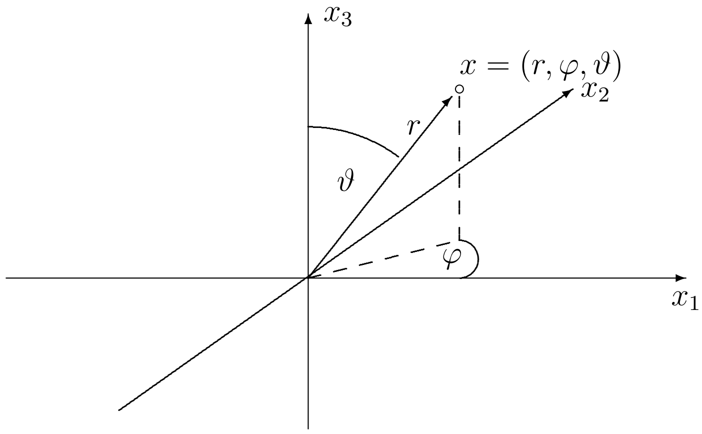
4.) (Polarkoordinaten). Sei

$$D = \left\{ (r,\varphi,\psi) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 < r\,,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi\,,\ \ 0 < \vartheta < \pi \right\},$$

und sei $f : D \to \mathbb{R}^3$,

$$f(r,\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\vartheta \\ r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Der Wertebereich dieser Abbildung ist $\mathbb{R}^3$ ohne die x_3–Achse.



Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}^m$ heißt stetig in $a \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

für alle $x \in D$ mit $\|x - a\| < \delta$.

Beachte, daß die beiden Normen im $\mathbb{R}^n$ und im $\mathbb{R}^m$ mit demselben Symbol $\|\cdot\|$ bezeichnet wurden. Es kommt bei dieser Definition nicht darauf an, welche Norm verwendet wird. Fast alle Sätze über reelle stetige Funktionen übertragen sich auf stetige Funktionen vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$ mit denselben Beweisen. Ich will einige Dinge kurz wiederholen.

Satz: f ist genau dann stetig an a, wenn es zu jeder Umgebung V des Punktes $f(a)$ eine Umgebung U von a gibt mit $f(U \cap D) \subseteq V$.

Satz: f ist genau dann stetig in $a \in D$, wenn für jede Folge $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in D$, mit $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)\,.$$

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ und sei a Häufungspunkt von D. (Es muß nicht notwendig $a \in D$ sein.) Man schreibt

$$\lim_{x \to a} f(x) = b\,,$$

wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\|f(x) - b\| < \varepsilon$$

für alle $x \in D \backslash \{a\}$ mit $\|x - a\| < \delta$.

Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}\,, & (x,y) \neq 0 \\ 0\,, & (x,y) = 0\,. \end{cases}$$

Diese Funktion ist für $(x,y) \neq 0$ stetig, im Punkt $(x,y) = 0$ aber nicht stetig. Denn es gilt

$$f(x,0) = f(0,y) = 0\,,$$

also ist f auf den Geraden $x = 0$ und $y = 0$ identisch Null. Auf der Diagonalen $x = y$ gilt aber

$$f(x,y) = \frac{2x^2}{2x^2} = 1\,.$$

Für die beiden Folgen $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ mit $z_k = (\frac{1}{k}, 0)$ und $\{\tilde{z}_k\}_{k=1}^{\infty}$ mit $\tilde{z}_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ gilt also $\lim_{k\to\infty} z_k = \lim_{k\to\infty} \tilde{z}_k = 0$, aber

$$\lim_{k\to\infty} f(z_k) = 0 = f(0)\,, \qquad \lim_{k\to\infty} f(\tilde{z}_k) = 1\,.$$

Weil diese Grenzwerte der beiden Bildfolgen nicht übereinstimmen, besitzt f keinen Grenzwert in 0, und ist somit nicht stetig, und kann auch nicht durch eine andere Festlegung des Wertes $f(0)$ zu einer stetigen Funktion gemacht werden. Jedoch sind die Funktionen

$$x \mapsto f(x,y)\,, \quad y \mapsto f(x,y)$$

stetig, also ist f stetig in jeder Variablen.

Satz: Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D$. f ist stetig in a, genau dann wenn alle Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_m : D \to \mathbb{R}^1$ in a stetig sind.

Beweis: Sei $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge mit $x_k \in D$ und $\lim_{k\to\infty} x_k = a$. Es gilt $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$ genau dann wenn $\lim_{k\to\infty} f_i(x_k) = f_i(a)$ gilt für $i = 1, \ldots, m$. Hieraus folgt die

Behauptung. ■

Definition: $f : D \to \mathbb{R}^m$ heißt stetig, wenn f in jedem Punkt $x \in D$ stetig ist.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Teilmenge D' von D heißt relativ offen bezüglich D wenn eine offene Menge $O \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert mit $D' = O \cap D$.

Lemma: $O \subseteq D$ ist genau dann relativ offen bezüglich D, wenn zu jedem $x \in O$ eine Umgebung U von x existiert mit $U \cap D \subseteq O$.

Beweis: Sei O relativ offen mit $x \in O$. Dann existiert eine offene Menge O' mit $O = O' \cap D$. Dann ist O' die gesuchte Umgebung. Umgekehrt existiere zu jedem $x \in O$ eine Umgebung $U(x)$ mit $U(x) \cap D \subseteq O$. Weil jede Umgebung eine offene Umgebung enthält, kann angenommen werden, daß $U(x)$ offen ist. Dann ist

$$O \subseteq D \cap \bigcup_{x \in O} U(x)$$

und

$$D \cap \bigcup_{x \in O} U(x) = \bigcup_{x \in O} \Big(D \cap U(x) \Big) \subseteq O\,,$$

also $O = D \cap \bigcup_{x \in O} U(x)$. Da $\bigcup_{x \in O} U(x)$ offen ist, folgt die Behauptung. ■

Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$. $f : D \to \mathbb{R}^m$ ist stetig, genau dann wenn das Urbild jeder offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ unter f relativ offen ist bezüglich D.

Beweis: Sei f stetig, $O \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $x \in f^{-1}(O)$. Dann ist $f(x) \in O$, also ist O Umgebung von $f(x)$, also existiert eine Umgebung V von x mit $f(V \cap D) \subseteq O$, also gilt $V \cap D \subseteq f^{-1}(O)$, also ist $f^{-1}(O)$ relativ offen bezüglich D.

Sei umgekehrt das Urbild jeder offenen Menge relativ offen. Sei $x \in D$. Sei U eine offene Umgebung von $f(x)$. Dann ist $f^{-1}(U)$ relativ offen, also existiert eine offene Menge $O \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $f^{-1}(U) = O \cap D$. Wegen $x \in f^{-1}(U) \subseteq O$ ist O Umgebung von x, also ist f stetig wegen

$$f(O \cap D) = f\Big(f^{-1}(U)\Big) \subseteq U\,.$$

■

Satz: (i) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$, $g : D \to \mathbb{R}^m$ seien stetig. Dann sind auch die Abbildungen

$$f + g\,, \quad cf \quad (c \in \mathbb{R})$$

stetig.

(ii) Seien $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist auch $f \cdot g$ stetig. $\frac{f}{g}$ ist stetig in allen Punkten, in denen g nicht verschwindet.

(iii) Seien $f : D \to \mathbb{R}^m$, $\varphi : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist auch φf stetig.

Beweis: klar!

Satz: Seien $D_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D_1 \to \mathbb{R}^p$, $D_2 \subseteq \mathbb{R}^p$, $g : D_2 \to \mathbb{R}^m$ stetige Abbildungen, so daß $g \circ f$ existiert. Dann ist auch $g \circ f$ stetig.

Beweis: klar!

Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$. $f : D \to \mathbb{R}^m$ heißt gleichmäßig stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

für alle $x, y \in D$ mit $\|x - y\| < \delta$.

Satz: Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig und D kompakt. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und f stetig. Dann ist $f(D)$ kompakt.

Folgerung: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f das Maximum und Minimum an.

Definition: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. M heißt zusammenhängend, wenn gilt:
Sei $U_1, U_2 \subseteq M$ relativ offen mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $M = U_1 \cup U_2$. Dann muß entweder $M = U_1$ und $U_2 = \emptyset$ oder $M = U_2$ und $U_1 = \emptyset$ gelten.

Beispiel: Jedes Intervall in $\mathbb{R}$ ist zusammenhängend.

Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ zusammenhängend und $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann ist $f(D)$ zusammenhängend.

Beweis: Seien $U_1, U_2 \subseteq f(D)$ relativ offen mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $f(D) = U_1 \cup U_2$. Da f stetig ist, sind dann $f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2)$ relativ offen mit $f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = \emptyset$ und $f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) = D$. Da D zusammenhängend ist, ist $f^{-1}(U_1)$ oder $f^{-1}(U_2) = \emptyset$, also ist U_1 oder $U_2 = \emptyset$, und hieraus folgt die Behauptung. ∎

Definition: Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann heißt γ ein Weg.

Definition: Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt wegzusammenhängend, wenn zwei beliebige Punkte von M durch einen in M verlaufenden Weg stetig miteinander verbunden werden können, d.h. wenn es zu $x, y \in M$ ein Intervall $[a,b]$ und eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to M$ gibt mit $\gamma(a) = x\,,\ \ \gamma(b) = y\,.$

$\gamma(a)$ heißt Anfangspunkt, $\gamma(b)$ Endpunkt des Weges.

Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend, $f : D \to \mathbb{R}^m$ sei stetig. Dann ist $f(D)$ wegzusammmenhängend.

Beweis: Sei $a, b \in f(D)\,$, und seien $x \in f^{-1}(a)\,,\ \ y \in f^{-1}(b)\,.$ Dann existiert ein Weg $\gamma\,$, der x in D mit y verbindet. $f \circ \gamma$ ist dann ein Weg, der a mit b in $f(D)$ verbindet. ■

Satz: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend. Dann ist M zusammenhängend.

Beweis: Angemommen, M sei nicht zusammenhängend. Dann existieren bezüglich M relativ offene Mengen $U_1 \neq \emptyset\,,\ \ U_2 \neq \emptyset$ mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $U_1 \cup U_2 = M\,.$ Wähle $x \in U_1\,,\ \ y \in U_2\,$, und wähle einen Weg $\gamma : [a,b] \to M\,$, der x mit y innerhalb M verbindet. Seien

$$\begin{aligned} V_1 &= \gamma\Big([a,b]\Big) \cap U_1 \\ V_2 &= \gamma\Big([a,b]\Big) \cap U_2\,. \end{aligned}$$

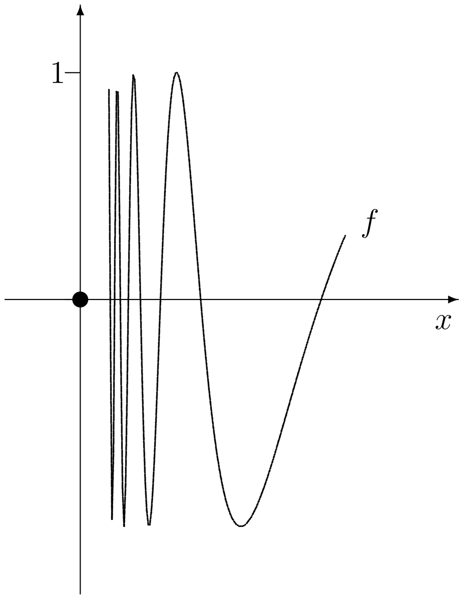
V_1 und V_2 sind relativ offen bezüglich $\gamma([a,b])\,.$ Außerdem gilt $V_1 \neq \emptyset\,,\ \ V_2 \neq \emptyset\,,\ \ V_1 \cap V_2 = \emptyset\,,\ \ V_1 \cup V_2 = \gamma([a,b])\,$, also ist $\gamma([a,b])$ nicht zusammenhängend.

Andererseits ist $[a,b]$ zusammenhängend und γ stetig, also $\gamma([a,b])$ zusammenhängend. Dies ist ein Widerspruch, also muß M zusammenhängend sein. ■

Beispiel: Betrachte die Abbildung $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}\,$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}\,, & x > 0 \\ 0\,, & x = 0\,. \end{cases}$$

Dann ist die Bildmenge $M = \{(x, f(x)) \,\big|\, x \in \mathbb{R}_0^+\} \subseteq \mathbb{R}^2$ zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.



Der Beweis, daß M nicht wegezusammenhängend ist, bleibt dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

Ich zeige, daß M zusammenhängend ist. Angenommen, M sei nicht zusammenhängend. Seien $U_1, U_2 \subseteq M$ relativ offene Mengen mit $U_1 \neq \emptyset$, $U_2 \neq \emptyset$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $U_1 \cup U_2 = M$. Die Menge $M' = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^+\} \subseteq M$ ist zusammenhängend als Bild von $\mathbb{R}^+$ unter der stetigen Abbildung

$$x \mapsto \Big(x, f(x)\Big) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2 .$$

Also muß entweder $U_1 \cap M' = \emptyset$ oder $U_2 \cap M' = \emptyset$ sein. O.B.d.A. sei $U_1 \cap M' = \emptyset$. Dann gilt $U_2 = M'$ und $U_1 = \{(0,0)\}$. Diese Menge U_1 ist aber nicht relativ offen bezüglich M, denn sonst würde eine offene Menge $O \subseteq \mathbb{R}^2$ existieren mit $U_1 = M \cap O$. O wäre Umgebung von $(0,0)$, würde also noch eine ε–Umgebung von $(0,0)$ enthalten, also würde O außer $(0,0)$ auch noch andere Punkte von M enthalten, also $U_1 \neq M \cap O$. Dies ist ein Widerspruch, also ist M zusammenhängend. ∎

Dieses Beispiel zeigt, daß die Umkehrung des letzten Satzes nicht gilt.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ sei stetig und injektiv. Die Umkehrabbildung $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}^n$ braucht nicht stetig zu sein. Es gilt aber:

Satz: Ist f eine injektive, stetige Abbildung mit kompaktem Definitionsbereich, dann ist auch f^{-1} stetig.

Beweis: wie im $\mathbb{R}^1$!

Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, sei $f : D \to W \subseteq \mathbb{R}^m$ bijektiv, und seien f und $f^{-1} : W \to D$ stetig. Dann heißt f Homöomorphismus von D auf W.

1 d.) Gleichmäßige Konvergenz

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^m$.

Definition: Sei D eine Menge, $f : D \to \mathbb{R}^m$ sei beschränkt. Dann heißt

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in D} \|f(x)\|$$

die Supremumsnorm von f.

Daß $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm ist, beweist man wie für reellwertige Abbildungen. (Siehe das Skriptum Analysis I, Abschnitt 9 c.)

Die Menge $B(D, \mathbb{R}^m)$ aller beschränkten Abbildungen von D nach $\mathbb{R}^m$ ist ein reeller Vektorraum. Mit $\|\cdot\|_\infty$ wird $B(D, \mathbb{R}^m)$ zu einem normierten Raum. Die Norm in $B(D, \mathbb{R}^m)$ hängt natürlich davon ab, welche Norm in $\mathbb{R}^m$ gewählt wird. Da aber in $\mathbb{R}^m$ alle Normen äquivalent sind, gilt dies auch für die hiermit definierten Supremumsnormen auf $B(D, \mathbb{R}^m)$. Seien $\|\cdot\|^{(1)}$, $\|\cdot\|^{(2)}$ Normen auf $\mathbb{R}^m$, und $\|\cdot\|_\infty^{(1)}$, $\|\cdot\|_\infty^{(2)}$ die zugehörigen Normen auf $B(D, \mathbb{R}^m)$. Dann existieren Konstanten $a, b > 0$ mit

$$\begin{aligned} a\|x\|^{(2)} &\leq \|x\|^{(1)} \leq b\|x\|^{(2)}, \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^m \\ a\|f\|_\infty^{(2)} &\leq \|f\|_\infty^{(1)} \leq b\|f\|_\infty^{(2)}, \quad \text{für alle} \quad f \in B(D, \mathbb{R}^m). \end{aligned}$$

Somit hängt die folgende Definition nicht von der auf $\mathbb{R}^m$ gewählten Norm ab:

Definition: Sei D eine Menge, $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ sei eine Folge von Abbildungen $f_k \in B(D, \mathbb{R}^m)$. $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ heißt gleichmäßig konvergent, wenn $f \in B(D, \mathbb{R}^m)$ existiert mit

$$\lim_{k \to \infty} \|f_k - f\|_\infty = 0.$$

Satz: (Cauchysches Konvergenzkriterium) $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\|f_k - f_\ell\|_\infty < \varepsilon$$

für alle $k, \ell \geq k_0$.

Also ist $B(D, \mathbb{R}^m)$ vollständig, d.h. $B(D, \mathbb{R}^m)$ ist ein Banachraum. Man beweist diesen

Satz wie für reellwertige Abbildungen. (Siehe Skriptum Analysis I, Abschnitt 9 c).

Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, sei $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_k \in B(D, \mathbb{R}^m)$. $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ konveriere gleichmäßig gegen f. Dann ist f stetig.

Beweis: wie für reellwertige Abbildungen.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $C(D, \mathbb{R}^m)$ sei der Raum der beschränkten stetigen Abbildungen. Aus diesem Satz folgt, daß auch $C(D, \mathbb{R}^m)$ ein Banachraum ist.