

Integration im \mathbb{R}^n

Vorlesungsskript zum zweiten Teil der Analysis II
im SS 2009

Technische Universität Darmstadt

Prof. Dr. R. Farwig

4 Wege und Wegintegrale

4 a) Wege im \mathbb{R}^n

Definition

(1) Ein (parametrisierter) *Weg* im \mathbb{R}^n ist eine stetige Abbildung

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Der Weg heißt differenzierbar (bzw. stetig differenzierbar), wenn seine Parametrisierung γ differenzierbar (bzw. stetig differenzierbar) ist. Das Bild $\gamma(I)$ heißt auch die *Spur* von γ , kurz $\text{Spur}(\gamma)$.

(2) Ist γ stetig differenzierbar, heißt für $t \in I$

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

Tangentenvektor des Weges γ an der Stelle $\gamma(t)$. Ist $\gamma'(t) \neq 0$, heißt γ *regulär* an der Parameterstelle t , und der auf euklidische Länge 1 normierte Vektor $\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$ ist der sog. *Tangenten-Einheitsvektor*. Falls $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt, heißt γ regulär.

Beispiel (1) Der Weg $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, beschreibt die im mathematisch positiven Sinn (Gegenuhrzeigersinn) durchlaufene geschlossene Kreislinie des Einheitskreises $\gamma([0, 2\pi]) = \partial B_1(0)$. Der Weg ist regulär, und der Tangentialvektor $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ ist für alle $t \in [0, 2\pi]$ bereits auf Länge 1 normiert.

(2) $\tilde{\gamma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\tilde{\gamma}(t) = (\cos t, -\sin t)$, beschreibt den im Uhrzeigersinn durchlaufenen Einheitskreis; γ und $\tilde{\gamma}$ haben also die gleiche Spur:

$$\tilde{\gamma}([0, 2\pi]) = \gamma([0, 2\pi]) = \partial B_1(0).$$

Dennoch sind wegen der verschiedenen „Orientierung“ die Wege γ und $\tilde{\gamma}$ nicht gleich.

(3) Auch der Weg $\delta : [0, \sqrt{2\pi}] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\delta(t) = (\cos t^2, \sin t^2)$, hat die Spur $\delta([0, \sqrt{2\pi}]) = \partial B_1(0)$. In diesem Fall ist der Weg in $t = 0$ aber nicht regulär.

Definition Ein *Polygonzug* im \mathbb{R}^n ist ein Weg $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit einer Zerlegung (Partition) $Z : a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ von $[a, b]$, so dass $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$, $1 \leq j \leq m$, ein Geradenstück beschreibt. Die *Bogenlänge* $s(\gamma)$ des Polygonzuges γ wird durch

$$s(\gamma) = s_Z(\gamma) = \sum_{j=1}^m |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|$$

mit $|\cdot| = \|\cdot\|_2$ definiert.

Bemerkung Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Polygonzug mit Zerlegungen $Z \subset Z'$ von $[a, b]$, gilt

$$s(\gamma) = s_Z(\gamma) = s_{Z'}(\gamma).$$

Die Bogenlänge von γ hängt also nicht von der gewählten Zerlegung ab.

Definition Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg.

- (1) Für eine beliebige Zerlegung $Z : t_0 < t_1 < \dots < t_m$ mit $t_j \in I$, $1 \leq j \leq m$, bezeichne

$$s(\gamma, Z) := \sum_{j=1}^m |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|$$

die Bogenlänge des durch die Punkte $\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_m)$ eindeutig bestimmten interpolierenden Polygonzuges.

- (2) Der Weg γ heißt *rektifizierbar*, wenn $\sup_Z s(\gamma, Z) < \infty$ ist. In diesem Fall heißt

$$s(\gamma) := \sup_Z s(\gamma, Z)$$

die *Bogenlänge* von γ .

Beispiel Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitzstetig, d.h., es gibt ein $L \geq 0$, so dass $|\gamma(t) - \gamma(s)| \leq L|t - s|$ für alle $t, s \in [a, b]$. Dann ist der Weg γ rektifizierbar mit

$$s(\gamma) \leq L|b - a|.$$

Tatsächlich gilt für jede Zerlegung $Z : a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq b$

$$\begin{aligned} s(\gamma, Z) &= \sum_{j=1}^m |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \leq \sum_{j=1}^m L|t_j - t_{j-1}| \\ &= L \sum_{j=1}^m (t_j - t_{j-1}) = L(t_m - t_0) \\ &\leq L(b - a). \end{aligned}$$

Satz 4.1 Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg. Dann ist γ rektifizierbar, und es gilt

$$s(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Korollar 4.2 Der Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei durch den Graphen einer C^1 -Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, d.h., $\gamma(t) = (t, f(t))$. Dann ist γ rektifizierbar und

$$s(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

Beispiel Sei $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, die oben beschriebene Parametrisierung des Einheitskreises. Dann gilt für jeden „Bogen“ $\gamma|_{[0,x]}$, $0 \leq x \leq 2\pi$,

$$s(\gamma|_{[0,x]}) = \int_0^x |(-\sin t, \cos t)| dt = \int_0^x 1 dt = x.$$

Der Wert x ist also die Bogenlänge des durch $\gamma|_{[0,x]}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, x]$, beschriebenen Teilbogens des Einheitskreises; deshalb wird der Winkel x auch als *Bogenmaß* bezeichnet. Insbesondere ist

$$s(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt = 2\pi$$

die Bogenlänge (*Umfang*) des Einheitskreises.

Beweis von Satz 4.1 Zuerst zeigen wird, dass γ rektifizierbar ist mit

$$s(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Tatsächlich gilt für jede Zerlegung $Z : a \leq t_0 < \dots < t_m \leq b$

$$\begin{aligned} s(\gamma, Z) &= \sum_{j=1}^m |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \\ &= \sum_{j=1}^m \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(\tau)| d\tau \\ &\leq \int_a^b |\gamma'(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Dabei wurde im 2. Schritt die Ungleichung $|\int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(\tau) d\tau| \leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(\tau)| d\tau$ für den stetigen Integranden $\gamma' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ausgenutzt; zum Beweis approximiert man beide Integrale durch Riemannsche Summen und benutzt dort die übliche Dreiecksungleichung für die Norm $|\cdot|$.

Jetzt sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Unser Ziel ist es, eine Zerlegung Z des kompakten Intervalls $[a, b]$ mit

$$\left| s(\gamma, Z) - \int_a^b |\gamma'(t)| dt \right| < \varepsilon \tag{4.1}$$

zu finden. Da $|\gamma'(\cdot)|$ auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für jede Zerlegung $Z : a = t_0 < \dots < t_m = b$ der Gitterweite $\Delta(Z) =$

$\max_j(t_j - t_{j-1}) < \delta$ gilt:

$$\left| \int_a^b |\gamma'(t)| dt - \sum_{j=1}^m |\gamma'(t_j)| (t_j - t_{j-1}) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.2)$$

An dieser Stelle ist (4.1) bereits bewiesen, wenn die Terme $|\gamma'(t_j)| (t_j - t_{j-1})$ durch die Terme $|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|$ ersetzt bzw. approximiert werden könnten. Nun gilt

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^m (|\gamma'(t_j)|(t_j - t_{j-1}) - |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|) \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^m |(\gamma'(t_j)(t_j - t_{j-1}) - (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})))| \\ & = \sum_{j=1}^m \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\gamma'(t_j) - \gamma'(\tau)) d\tau \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t_j) - \gamma'(\tau)| d\tau. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von γ' auf $[a, b]$ gibt es ein $0 < \delta' \leq \delta$, so dass $|\gamma'(t_j) - \gamma'(\tau)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ für alle $\tau \in [t_{j-1}, t_j]$ mit $|t_j - t_{j-1}| < \delta'$ gilt. Damit kann die obige Ungleichungskette wie folgt fortgeschrieben werden:

$$\leq \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} d\tau = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.4)$$

Jetzt folgt aus (4.2) - (4.4) für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ mit $\Delta(Z) < \delta' \leq \delta$ die Behauptung (4.1). ■

Definition

- (1) Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg, und sei $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ eine stetige bijektive Abbildung, so dass

$$\delta = \gamma \circ \varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

einen Weg mit $\text{Spur}(\delta) = \text{Spur}(\gamma)$ definiert. Dann nennt man φ eine *Parametertransformation*. Sind $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ und $\varphi^{-1} : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ k -mal stetig differenzierbar, heißt φ eine C^k -Parametertransformation.

- (2) Ist in (1) die Parametertransformation streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend), heißt φ *orientierungstreu* (bzw. *orientierungsumkehrend*).

Satz 4.3 Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg, $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ eine C^1 -Parametertransformation und $\delta = \gamma \circ \varphi$. Dann gilt

$$s(\gamma) = s(\delta),$$

d. h., die Bogenlänge ist invariant unter C^1 -Parametertransformationen.

Beweis Mit der Kettenregel und der Substitutionsregel folgt

$$\begin{aligned} s(\delta) &= \int_{\alpha}^{\beta} |\delta'(\tau)| d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(\varphi(\tau))| |\varphi'(\tau)| d\tau \\ &= \int_a^b |\gamma'(t)| dt = s(\gamma), \end{aligned}$$

unabhängig davon, ob $\varphi' > 0$ oder $\varphi' < 0$ auf $[\alpha, \beta]$ gilt. ■

Bemerkung Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein regulärer C^1 -Weg. Dann ist die Bogenlänge

$$s(t) := s(\gamma|_{[a,t]}) = \int_a^t |\gamma'(\tau)| d\tau$$

eine stetig differenzierbare Funktion auf $[a, b]$ mit

$$s'(t) = |\gamma'(t)| > 0.$$

Folglich ist $s(t)$ streng monoton wachsend, und

$$\psi = s : [a, b] \rightarrow [0, s(\gamma)]$$

ist eine orientierungstreue, C^1 -Parametertransformation. Mit Hilfe ihrer Umkehrfunktion

$$\varphi = \psi^{-1} : [0, s(\gamma)] \rightarrow [a, b]$$

erhalten wir den Weg

$$\delta = \gamma \circ \varphi : [0, s(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mi der gleichen Orientierung wie γ , mit $\text{Spur}(\delta) = \text{Spur}(\gamma)$ und

$$\delta'(\tau) = \gamma'(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) = \gamma'(t) \frac{1}{\psi'(t)} = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \quad \text{mit } t = \varphi(\tau).$$

Folglich gilt $|\delta'(\tau)| = 1$ und

$$s(\delta|_{[0,x]}) = \int_0^x |\delta'(\tau)| d\tau = x, \quad 0 \leq x \leq s(\gamma),$$

d. h., die Bogenlänge des Bogenstücks $\delta|_{[0,x]}$ ist gleich x . Man sagt, dass der Weg δ nach der Bogenlänge parametrisiert wurde.

Nach dem eben beschriebenen Vorgehen kann jeder reguläre C^1 -Weg γ so umparametrisiert werden, dass $\delta = \gamma \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Das Arbeiten mit nach der Bogenlänge parametrisierten Wegen ist wesentlich einfacher, jedoch sind die orientierungstreuen Parametertransformationen ψ und $\varphi = \psi^{-1}$ im Allgemeinen nicht explizit berechenbar.

4 b) Wegintegrale

Motivation Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Kraftfeld, ein sog. *Vektorfeld*, in dem ein Teilchen entlang eines rektifizierbaren Weges $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ bewegt wird. Sei $Z : a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Um das Teilchen von $\gamma(t_{j-1})$ nach $\gamma(t_j)$ entlang des Geradenstücks $[\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)]$ im angenähert konstanten Kraftfeld $f(\gamma(t_j))$ zu bewegen, wird die Arbeit

$$f(\gamma(t_j)) \cdot (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))$$

aufgewandt. Steht $f(\gamma(t_j))$ senkrecht auf $\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})$, wird keine Energie zum Transport benötigt; nur der zu $\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})$ parallele Anteil von $f(\gamma(t_j))$ erfordert Energie oder lässt Energie frei. Folglich ist

$$\sum_{j=1}^m f(\gamma(t_j)) \cdot (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))$$

eine Approximation der Gesamtarbeit beim Transport des Teilchens von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$. Etwas allgemeiner betrachten wir Riemannsche Summen

$$R(f, \gamma, Z) = \sum_{j=1}^{2n} f(\xi_j) \cdot (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))$$

mit beliebigen Zwischenpunkten $\xi_j \in \text{Spur } \gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$. Wegen $\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \approx \gamma'(t_j)(t_j - t_{j-1})$ ist obige Summe eine Approximation des „Wegintegrals“

$$\int_{\gamma} f(x) \cdot dx = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Satz 4.4 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld und $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ ein rektifizierbarer Weg. Dann existiert eine reelle Zahl $I(f, \gamma)$, so dass die Riemannschen Summen $R(f, \gamma, Z)$ (bei beliebiger Wahl von Zwischenpunkten ξ_j) gegen $I(f, \gamma)$ konvergieren, wenn die Gitterweite $\Delta(Z)$ der Zerlegung Z gegen 0 konvergiert. Genauer gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für jede Zerlegung $Z : a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ mit $\Delta(Z) < \delta$

$$|R(f, \gamma, Z) - I(f, \gamma)| < \varepsilon$$

gilt. Für $I(f, \gamma)$, das Wegintegral von f entlang γ , schreibt man auch

$$\int_{\gamma} f(x) \cdot dx = \int_{\gamma} f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n.$$

Beweis Seien Z und Z' Zerlegungen von $[a, b]$ mit Gitterweite $< \delta$ und zugehörigen Zwischenpunkten (ξ_k) bzw. (ξ'_ℓ) . Dann ist $Z'' = Z \cup Z' : a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ ebenfalls eine Zerlegung $[a, b]$ mit Gitterweite $< \delta$. Mit Hilfe der Ungleichung von Cauchy-Schwarz erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} |R(f, \gamma, Z) - R(f, \gamma, Z')| &= \left| \sum_j (f(\xi_j) - f(\xi'_j)) \cdot (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) \right| \\ &\leq \sum_j |f(\xi_j) - f(\xi'_j)| |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|, \end{aligned}$$

wobei die Zwischenpunkte ξ_j bzw. ξ'_j jetzt unter Umständen mehrfach in obiger Summe auftreten und im Allgemeinen *nicht* die Bedingung $\xi_j, \xi'_j \in \gamma([t_{j-1}, t_j])$ erfüllen. Es gibt jedoch wegen $Z'' = Z \cup Z'$ und wegen der Bedingung an $\Delta(Z)$ und $\Delta(Z')$ Punkte $\tau_j, \tau'_j \in [a, b]$ mit

$$\xi_j = \gamma(\tau_j), \quad \xi'_j = \gamma(\tau'_j) \quad \text{und} \quad |\tau_j - \tau'_j| \leq 2\delta.$$

Nun sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen der Stetigkeit von f ist $f \circ \gamma$ gleichmäßig stetig auf $[a, b]$, und wir finden ein $\delta > 0$, so dass

$$|f \circ \gamma(\tau) - f \circ \gamma(\tau')| < \frac{\varepsilon}{s(\gamma)}, \quad \text{falls} \quad |\tau - \tau'| \leq 2\delta.$$

Damit folgt für alle Zerlegungen Z, Z' mit Gitterweite $< \delta$

$$|R(f, \gamma, Z) - R(f, \gamma, Z')| \leq \frac{\varepsilon}{s(\gamma)} \cdot \sum_j |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \leq \varepsilon. \quad (4.5)$$

Ist (Z_n) eine Folge von Zerlegungen von $[a, b]$ mit Gitterweite $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, folgt mit (4.5), dass $(R(f, \gamma, Z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} ist. Es gibt also eine Zahl $I \in \mathbb{R}$ mit

$$R(f, \gamma, Z_n) \rightarrow I \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty.$$

Tatsächlich ist der Grenzwert I von der betrachteten Folge von Zerlegungen (und zugehörigen Zwischenpunkten) unabhängig: Sind $(Z_n), (Z'_n)$ Folgen von Zerlegungen mit $\Delta(Z_n) \rightarrow 0, \Delta(Z'_n) \rightarrow 0$, ist auch für die gemischte Folge $(Z''_n) = (Z_1, Z'_1, Z_2, Z'_2, \dots)$ die Folge $(R(f, \gamma, Z''_n))$ konvergent und besitzt die konvergenten Teilfolgen $(R(f, \gamma, Z_n))$ und $(R(f, \gamma, Z'_n))$. Daraus schließt man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(f, \gamma, Z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} R(f, \gamma, Z'_n).$$

Folglich ist $I = I(f, \gamma)$ das gesuchte Wegintegral von f entlang γ . ■

Satz 4.5 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld und $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ ein C^1 -Weg. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(x) \cdot dx = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Beweis Für eine Zerlegung $Z : a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ von $[a, b]$ und geeigneten Zwischenpunkten (ξ_j) gilt

$$\begin{aligned} R(f, \gamma, Z) &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \sum_{j=1}^m \left(f(\xi_j) \cdot (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) - \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \right) \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} (f(\xi_j) - f(\gamma(t))) \cdot \gamma'(t) dt. \end{aligned}$$

Da γ und $f \circ \gamma$ auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig sind, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass aus $\Delta(Z) < \delta$

$$|f(\xi_j) - f(\gamma(t))| < \frac{\varepsilon}{s(\gamma)} \quad \text{für } \xi_j \in \gamma([t_{j-1}, t_j]), t \in [t_{j-1}, t_j]$$

folgt. Damit erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} |R(f, \gamma, Z) - \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt| \\ \leq \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\varepsilon}{s(\gamma)} \cdot |\gamma'(t)| dt = \varepsilon \frac{s(\gamma)}{s(\gamma)} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Jetzt liefert Satz 4.4 die Behauptung. ■

Korollar 4.6 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, γ ein rektifizierbarer Weg in U , und seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Vektorfelder.

$$(1) \int_{\gamma} (f + g)(x) \cdot dx = \int_{\gamma} f(x) \cdot dx + \int_{\gamma} g(x) \cdot dx$$

$$\int_{\gamma} (cf)(x) \cdot dx = c \int_{\gamma} f(x) \cdot dx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(2) Sei γ^- der aus γ entstehende Weg umgekehrter Orientierung, d. h. für $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ ist γ^- z.B. definiert durch

$$\gamma^- : [a, b] \rightarrow U, \quad \gamma^-(t) = \gamma(a + b - t).$$

Dann gilt

$$\int_{\gamma^-} f(x) \cdot dx = - \int_{\gamma} f(x) \cdot dx.$$

(3) Sei $\tilde{\gamma} : [b, c] \rightarrow U$ ein weiterer rektifizierbarer Weg mit Endpunkt von γ = Anfangspunkt von $\tilde{\gamma}$, also $\gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$, und sei $\gamma \oplus \tilde{\gamma} : [a, c] \rightarrow U$ der dementsprechend zusammengehängte Weg von $\gamma(a)$ nach $\tilde{\gamma}(c)$, d. h.

$$\gamma \oplus \tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t), & t \in [a, b] \\ \tilde{\gamma}(t), & t \in (b, c]. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\int_{\gamma \oplus \tilde{\gamma}} f(x) \cdot dx = \int_{\gamma} f(x) \cdot dx + \int_{\tilde{\gamma}} f(x) \cdot dx.$$

(4) Mit der Supremumsnorm $\|f\|_{\infty, \gamma} = \sup\{|f(x)| \mid x \in \text{Spur}(\gamma)\}$ von f entlang γ gilt

$$\left| \int_{\gamma} f(x) \cdot dx \right| \leq \|f\|_{\infty, \gamma} s(\gamma).$$

Beweis von (4): Für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ gilt aufgrund der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |R(f, \gamma, Z)| &= \left| \sum_j f(\xi_j) \cdot (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) \right| \\ &\leq \sum_j |f(\xi_j)| |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \\ &\leq \|f\|_{\infty, \gamma} \sum_j |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \\ &\leq \|f\|_{\infty, \gamma} s(\gamma), \end{aligned}$$

da $f(\xi_j) \in f(\text{Spur}(\gamma))$. ■

Satz 4.7 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^0 -Vektorfeld, γ ein rektifizierbarer Weg in U und φ eine orientierungstreue C^1 -Parametertransformation. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(x) \cdot dx = \int_{\gamma \circ \varphi} f(x) \cdot dx,$$

d. h., das Wegintegral ist unabhängig von der benutzten Parametrisierung.

Beweis für den Fall $\gamma \in C^1([a, b])$. Nach Satz 4.5 und der Substitutionsregel gilt mit der C^1 -Parametertransformation $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(x) \cdot dx &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(\varphi(s))) \cdot \gamma'(\varphi(s)) \varphi'(s) ds \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma \circ \varphi(s)) \cdot \frac{d}{ds}(\gamma \circ \varphi)(s) ds \\ &= \int_{\gamma \circ \varphi} f(x) \cdot dx. \end{aligned}$$

Falls γ rektifizierbar ist, aber nicht vom Typ C^1 , benutzt man die Approximation der Wegintegrale durch geeignete Riemannsche Summen. ■

4 c) Wegunabhängigkeit und Potentiale

Es stellt sich die Frage, ob das Wegintegral $\int_{\gamma} f(x) \cdot dx$ von der genauen Form des Weges γ bei festem Anfangspunkt und festem Endpunkt abhängt. Gilt z. B.

$$\int_{\gamma_1} f(x) \cdot dx = \int_{\gamma_2} f(x) \cdot dx,$$

wenn γ_1 und γ_2 die gleichen Anfangspunkte und die gleichen Endpunkte haben? Im Hinblick auf Korollar 4.6 (3) kann man dann fragen, ob für jeden *geschlossenen* Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow U$, d. h. mit $\gamma(b) = \gamma(a)$,

$$\oint_{\gamma} f(x) \cdot dx = \int_{\gamma} f(x) \cdot dx = 0$$

gilt; dabei deutet das Symbol \oint_{γ} darauf hin, dass der Weg γ geschlossen ist.

Definition Eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein *Gebiet*, wenn sie wegzusammenhängend ist. Nach §2 ist also U ein Gebiet, falls es zu zwei beliebigen Punkten $x, y \in U$ einen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ gibt mit

$$x = \text{Anfangspunkt von } \gamma = \gamma(a), \quad y = \text{Endpunkt von } \gamma = \gamma(b).$$

Bemerkung (vgl. Lemma 2.11) Zu je zwei Punkten X und Y in einem Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt es immer einen x mit y verbindenden Polygonzug. Zum Beweis werden wir den nach Voraussetzung existierenden Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ durch einen geeigneten Polygonzug $\tilde{\gamma}$ ersetzen. Da Spur $\gamma = \gamma([a, b])$ eine kompakte Teilmenge von U ist, gilt

$$\varepsilon := \text{dist}(\text{Spur } \gamma, \partial U) = \inf\{\|u - v\| \mid u \in \text{Spur } \gamma, v \in \partial U\} > 0.$$

Dann liefert die gleichmäßige Stetigkeit von γ ein $\delta > 0$ mit $|\gamma(t) - \gamma(s)| < \varepsilon$ für alle $t, s \in [a, b]$ mit $|t - s| < \delta$. Zu diesem $\delta > 0$ finden wir eine Zerlegung $Z : a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ mit $\Delta(Z) < \delta$. Nun sei $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ der die Punkte $\gamma(t_0) = a, \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_m) = b$ verbindende Polygonzug. Um Spur $\tilde{\gamma} \subset U$ zu zeigen, sei $u = \tilde{\gamma}(t)$, $t \in [t_{j-1}, t_j]$. Da $\tilde{\gamma}$ ein Polygonzug ist, gibt es zu u ein $\vartheta \in [0, 1]$ mit

$$\begin{aligned} u &= \tilde{\gamma}(t_{j-1}) + \vartheta(\tilde{\gamma}(t_j) - \tilde{\gamma}(t_{j-1})) \\ &= \gamma(t_{j-1}) + \vartheta(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})). \end{aligned}$$

Also gilt

$$|u - \gamma(t_{j-1})| \leq |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| < \varepsilon,$$

woraus $u \in U$ folgt.

Glättet man anschließend die „Eckpunkte“ $\tilde{\gamma}(t_j)$ des Polygonzugs aus, erhält man, dass es zu $x, y \in U$ stets einen verbindenden C^1 - und sogar C^k -Weg, $k \in \mathbb{N}$, in U gibt.

Definition Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Gibt es eine differenzierbare Funktion $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \nabla\varphi(x) \quad \text{für alle } x \in U,$$

heißt f ein *Gradientenfeld* und φ ein *Potential* zu f .

Satz 4.8 Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Gradientenfeld. Dann sind alle Potentialfunktionen von f bis auf additive Konstanten eindeutig bestimmt.

Beweis Aus $f = \nabla\varphi$ folgt $f = \nabla(\varphi + c)$ für alle $c \in \mathbb{R}$. Nun seien φ und ψ Potentialfunktionen zu f auf dem Gebiet G . Dann gilt $\nabla(\varphi - \psi)$, so dass $\varphi - \psi$ nach Satz 2.12 mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ übereinstimmt. ■

Satz 4.9 Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Gradientenfeld mit Potential $\varphi \in C^1(G)$.

- (1) Für beliebige Punkte $x_0, x_1 \in G$ und jeden beliebigen x_0 mit x_1 verbindenden C^1 -Weg γ in G gilt

$$\int_{\gamma} f(x) \cdot dx = \varphi(x_1) - \varphi(x_0).$$

D. h., der Wert des Wegintegrals eines Gradientenfeldes hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges, nicht aber vom genauen Verlauf des Weges ab. Das Wegintegral ist in diesem Fall also wegunabhängig. Die gleiche Aussage gilt, falls γ nur stückweise stetig differenzierbar ist.

- (2) Ist insbesondere γ ein geschlossener Weg, d. h. $\gamma(b) = \gamma(a)$, gilt

$$\oint_{\gamma} f(x) \cdot dx = 0.$$

Beweis (1) Sei zuerst $\gamma \in C^1$. Mit Hilfe der Kettenregel und der Substitutionsregel folgt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(x) \cdot dx &= \int_a^b \nabla\varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)(t) dt \\ &= \varphi(x_1) - \varphi(x_0), \end{aligned}$$

da $\gamma(b) = x_1$ und $\gamma(a) = x_0$. Ist γ stückweise stetig differenzierbar, also $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]} \in C^1$ für Punkte $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$, erhält man mit $\gamma_j = \gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ und $\gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_m$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(x) \cdot dx &= \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f(x) \cdot dx \\ &= \sum_{j=1}^m \left\{ \varphi(\gamma(t_j)) - \varphi(\gamma(t_{j-1})) \right\} \\ &= \varphi(x_1) - \varphi(x_0). \end{aligned}$$

(2) ist eine einfache Folgerung aus (1). ■

Satz 4.10 Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Ist das Wegintegral über f wegunabhängig, ist f ein Gradientenfeld.

Genauer gilt: Sei $a \in G$ fest gewählt und sei $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\varphi(x) = \int_a^x f(y) \cdot dy := \int_{\gamma_x} f(y) \cdot dy,$$

wobei γ_x ein beliebiger a mit x verbindender stückweise stetig differenzierbarer Weg in G ist. Dann ist $\varphi \in C^1(G)$, und es gilt

$$f = \nabla \varphi.$$

Beweis Wegen der Wegunabhängigkeit des Wegintegrals von f ist φ eine wohldefinierte Funktion in G . Um die Differenzierbarkeit von φ in $x \in G$ und $\nabla \varphi(x) = f(x)$ zu zeigen, wähle man ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset G$, so dass also für jedes $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h| < \varepsilon$ die Strecke

$$[x, x+h] = \{\sigma_h(t) = x+th \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

in $B_\varepsilon(x) \subset G$ liegt. Sei γ_x ein a mit x verbindender Weg in G , so dass $\gamma_x \oplus \sigma_h$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in G ist, der a mit $x+h$ verbindet. Dann folgt mit Korollar 4.6 (3) und Satz 4.5

$$\begin{aligned} &\varphi(x+h) - \varphi(x) - f(x) \cdot h \\ &= \int_{\gamma_x \oplus \sigma_h} f(y) \cdot dy - \int_{\gamma_x} f(y) \cdot dy - f(x) \cdot h \\ &= \int_{\sigma_h} f(y) \cdot dy - f(x) \cdot h \\ &= \int_0^1 (f(x+th) - f(x)) \cdot h \, dt \end{aligned}$$

sowie die Abschätzung

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x) - f(x) \cdot h| \leq |h| \sup_{t \in [0,1]} |f(x+th) - f(x)|.$$

Jetzt liest man aus der Stetigkeit von f in G ab, dass φ in x differenzierbar ist und dass $f(x) = \nabla\varphi(x)$ gilt. ■

Bemerkung (1) Nach Satz 4.9 und 4.10 ist die Wegunabhängigkeit von Wegintegralen eines Vektorfeldes f äquivalent dazu, dass f ein Gradientenfeld ist. In diesem Fall können Wegintegrale von f leicht mit Hilfe der bis auf Konstanten eindeutigen Potentialfunktion φ von f bestimmt werden. Dabei spielt φ die Rolle, die die Stammfunktionen im eindimensionalen Fall haben. Jedoch ist es praktisch unmöglich, mit Hilfe von Satz 4.10 zu zeigen, dass ein Vektorfeld ein Potential besitzt.

(2) Sei $f = (f_1, f_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Gradientenfeld und enthalte G das Rechteck

$$R = [(a, b), (c, d)] = \{(x_1, x_2) \mid a \leq x_1 \leq b, c \leq x_2 \leq d\}.$$

Dann ist nach Satz 4.10 ein Potential φ zu f auf R durch

$$\varphi(x_1, x_2) = \int_a^{x_1} f_1(s, c) ds + \int_c^{x_2} f_2(x_1, t) dt$$

gegeben. Eine analoge Formel gilt in höheren Dimensionen.

Satz 4.11 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Gradientenfeld. Dann gilt

$$\partial_k f_j = \partial_j f_k \quad \text{für } 1 \leq j, k \leq n$$

in U . Speziell gilt für $U \subset \mathbb{R}^2$

$$\text{rot } f := \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 = 0,$$

d. h., die sog. skalare Rotation $\text{rot } f$ von f verschwindet, sowie im Fall $U \subset \mathbb{R}^3$

$$\text{rot } f := \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix} = 0,$$

d. h., die (vektorielle) Rotation $\text{rot } f$ von f verschwindet.

Beweis Sie $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ ein Potential von f , $f = \nabla\varphi$. Dann ist $\varphi \in C^2(U)$ und der Satz von Schwarz liefert mit

$$\partial_k f_j = \partial_k \partial_j \varphi = \partial_j \partial_k \varphi = \partial_j f_k$$

die Behauptung. ■

Bemerkung Die Eigenschaft $\partial_k f_j = \partial_j f_k$, $1 \leq j, k \leq n$, ist eine notwendige Bedingung dafür, dass ein C^1 -Vektorfeld f ein Potential besitzt. Das Beispiel $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |(x, y)| < 2\} \subset \mathbb{R}^2$,

$$f : G \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = \frac{(-y, x)}{r^2}, r = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

zeigt jedoch, dass diese Eigenschaft nicht hinreichend ist. Tatsächlich zeigt man sofort $\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1$ in G . Für den geschlossenen Weg $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow G$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ gilt jedoch

$$\oint_{\gamma} f(x) \cdot dx = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = 2\pi.$$

Wäre f ein Gradientenfeld, müsste das Wegintegral von f längs des geschlossenen Weges γ verschwinden. Anschaulich beschreibt das Kraftfeld f einen Wirbel um den Ursprung, der auf einem Gebiet mit „Loch“ definiert ist.

Definition Ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, wenn es einen Punkt $m \in G$ gibt, so dass für jedes $x \in G$ die Strecke $[m, x]$ in G liegt. Man sieht sofort, dass ein *konvexes* Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ (für alle $x, y \in G$ gilt $[x, y] \subset G$) sternförmig bzgl. jedes Punktes $m \in G$ ist.

Satz 4.12 Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig und sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld. Genau dann ist f ein Gradientenfeld, wenn f die Bedingung $\partial_k f_j = \partial_j f_k$, $1 \leq j, k \leq n$, in G erfüllt.

Beweis O. B. d. A. sei $m = 0$. Dann definiert man als Kandidaten für ein Potential φ von f die Funktion

$$\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n, \varphi(x) := \int_{\sigma_x} f(y) \cdot dy,$$

wobei σ_x den Weg $\sigma_x(t) = tx$, $t \in [0, 1]$, bezeichnet. Es gilt also

$$\varphi(x) = \int_0^1 f(tx) \cdot x dt = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 f_i(tx_1, \dots, tx_n) dt.$$

Da f stetig differenzierbar ist, verifiziert man leicht die folgende Rechnung: Für $k = 1, \dots, n$ gilt wegen $\partial_k f_i = \partial_i f_k$

$$\begin{aligned} \partial_k \varphi(x) &= \int_0^1 f_k(tx) dt + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 (\partial_k f_i)(tx) t dt \\ &= \int_0^1 f_k(tx) dt + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 (\partial_i f_k)(tx) t dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (t f_k(tx)) dt, \end{aligned}$$

so dass der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung nun $\partial_k \varphi(x) = f_k(x) - 0 = f_k(x)$ liefert. ■

Bemerkung Die geometrische Voraussetzung „sternförmig“ an das Gebiet G in Satz 4.12 ist nicht notwendig. Entscheidend ist vielmehr, dass G „keine Löcher“ hat, s. Vorlesung über Vektoranalysis. Ein Gebiet, also eine zusammenhängende offene Menge, welches „keine Löcher“ besitzt, heißt *einfach zusammenhängend*.

5 Das Riemann-Integral auf Rechtecken

Definition

- (1) Seien J_1, \dots, J_n kompakte nichtleere Intervalle in \mathbb{R} . Dann heißt $R = J_1 \times \dots \times J_n \subset \mathbb{R}^n$ (*abgeschlossenes Rechteck*) im \mathbb{R}^n .
- (2) Sei für jedes $J_i = [a_i, b_i]$ eine Partition P_i ,

$$P_i : a_i = c_{i0} < c_{i1} < \dots < c_{ik_i} = b_i,$$

mit $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, n$, gegeben. Dann definiert die Menge aller Rechtecke vom Typ

$$[c_{1j_1}, c_{1j_1+1}] \times \dots \times [c_{nj_n}, c_{nj_n+1}]$$

mit $0 \leq j_i \leq k_i - 1$, $i = 1, \dots, n$, eine *Partition* $P = P_1 \times \dots \times P_n$ des Rechtecks R .

- (3) Das n -dimensionale Volumen des Rechtecks R wird durch

$$\text{vol}_n(R) := |R| := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

definiert.

Lemma 5.1 Sei $R \subset \mathbb{R}^n$ ein Rechteck und $P = \{S\}$ eine Partition von R . Dann gilt

$$|R| = \sum_{S \in P} |S|.$$

Beweis Mit den Bezeichnungen aus obiger Definition gilt

$$\sum_{S \in P} |S| = \sum_{j_1=0}^{k_1-1} \dots \sum_{j_n=0}^{k_n-1} (c_{1j_1+1} - c_{1j_1}) \cdot \dots \cdot (c_{nj_n+1} - c_{nj_n}).$$

Schreibt man die innere Summe über j_n direkt vor den Term $(c_{nj_n+1} - c_{nj_n})$, erhält man

$$\sum_{j_1=0}^{k_1-1} \dots \sum_{j_{n-1}=0}^{k_{n-1}-1} (\dots) \cdot \dots \cdot (\dots) (b_n - a_n)$$

und per Induktion schließlich $\prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = |R|$. ■

Definition

- (1) Sei $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, und sei $P = \{S\}$ eine Partition des Rechtecks R . Dann heißen

$$U_R(P, f) = U(P, f) := \sum_{S \in P} \inf_S f \cdot |S|$$

bzw.

$$O_R(P, f) = O(P, f) := \sum_{S \in P} \sup_S f \cdot |S|$$

untere bzw. obere Riemann-Summe von f auf R .

- (2) Eine weitere Partition $P' = \{S'\}$ von R heißt *Verfeinerung* von P , falls es zu jedem $S' \in P'$ ein $S \in P$ gibt mit $S' \subset S$.

Lemma 5.2 *Ist P' eine Verfeinerung von P , so gilt*

$$U(P, f) \leq U(P', f) \leq O(P', f) \leq O(P, f).$$

Beweis Wir zeigen nur die erste Ungleichung, da die zweite trivial ist und die dritte wie die erste bewiesen wird. Nach Definition der Verfeinerung gibt es zum Rechteck $S \in P$ endlich viele Rechtecke $S'_1, \dots, S'_k \in P'$ mit

$$S = \bigcup_{j=1}^k S'_j, \quad |S| = \sum_{j=1}^k |S'_j|$$

(vgl. Lemma 5.1). Dann gilt

$$\inf_S f \cdot |S| = \sum_{j=1}^k |S'_j| \cdot \inf_S f \leq \sum_{j=1}^k |S'_j| \inf_{S'_j} f.$$

Nach Summation über $S \in P$ folgt $U(P, f) \leq U(P', f)$. ■

Definition

- (1) Sei $R \subset \mathbb{R}^n$ ein Rechteck und $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann heißen

$$\int_R^* f(x) dx := \sup_P U_R(P, f)$$

bzw.

$$\int_R f(x) dx := \inf_P O_R(P, f)$$

das (*Riemann-*)*Unter-* bzw. *Oberintegral* von f auf R . Dabei werden für \sup_P und \inf_P alle Partitionen P von R betrachtet.

(2) Ist $\int_R^* f(x)dx = \int_R f(x)dx$, so heißt f *Riemann-integrierbar*, und der gemeinsame Wert ist das *Riemann-Integral* von f über R :

$$\int_R f(x)dx := \int_R^* f(x)dx.$$

Beispiel Die charakteristische Funktion $f = \chi_Q$ des Rechtecks $Q \subset \mathbb{R}^n$ ist Riemann-integrierbar über jedem Rechteck $R \supset Q$, und es gilt

$$\int_R \chi_Q(x)dx = |Q|.$$

Mit Lemma 5.2 erhält man sofort das folgende Integrabilitätskriterium:

Lemma 5.3 (Riemannsches Integrabilitätskriterium)

Eine beschränkte Funktion $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Partition P von R mit

$$O(P, f) - U(P, f) < \varepsilon$$

gibt.

Satz 5.4 (1) Die Riemann-integrierbaren Funktionen auf einem Rechteck $R \subset \mathbb{R}^n$ bilden einen Vektorraum.

(2) Das Integral hat die folgenden Eigenschaften:

- (i) Die Abbildung $f \mapsto \int_R f(x)dx$ ist linear.
- (ii) Aus $f \geq 0$ folgt $\int_R f(x)dx \geq 0$.
- (iii) Aus $f \leq g$ folgt $\int_R f(x)dx \leq \int_R g(x)dx$.

Beweis Wir zeigen nur die Additivität des Integrals; die Aussage (ii) ist trivial, (iii) folgt sofort aus (ii). Seien also f, g integrierbar, sei $\varepsilon > 0$ gewählt, und seien P, P' Partitionen von R mit der Eigenschaft

$$O(P, f) - U(P, f) < \varepsilon, \quad O(P', g) - U(P', g) < \varepsilon, \quad (*)$$

vgl. Lemma 5.3. Wir finden eine weitere Partition P'' von R mit $S \cap S' \in P''$ für alle $S \in P, S' \in P'$ (falls $(S \cap S')^o \neq \emptyset$), also eine Verfeinerung von P und von P' . Da für $S \in P''$

$$\inf_S f + \inf_S g \leq \inf_S (f + g) \leq \sup_S (f + g) \leq \sup_S f + \sup_S g$$

gilt, erhält man

$$U(P'', f) + U(P'', g) \leq U(P'', f + g) \leq O(P'', f + g) \leq O(P'', f) + O(P'', g).$$

Da (*) auch für die feinere Partition P'' gilt, folgt

$$O(P'', f + g) - U(P'', f + g) < 2\varepsilon.$$

Also ist $f + g$ integrierbar und $\int_R (f + g)(x) dx = \int_R f(x) dx + \int_R g(x) dx$. ■

Die Berechnung mehrdimensionaler Integrale auf Rechtecken wird auf die Berechnung von eindimensionalen Integralen zurückgeführt. Seien $R \subset \mathbb{R}^n$ und $Q \subset \mathbb{R}^m$ kompakte Rechtecke, und sei $f : R \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Für jedes $x \in R$ betrachte man die Funktion

$$f_x : Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_x(y) := f(x, y).$$

Falls f_x für jedes $x \in R$ auf Q integrierbar ist, definieren wir die Funktion $I : R \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$I(x) := \int_Q f_x(y) dy.$$

Hauptsatz 5.5 (Satz von Fubini) (nach Guido Fubini 1879 – 1943)

Seien $R \subset \mathbb{R}^n$ und $Q \subset \mathbb{R}^m$ kompakte Rechtecke, sei $f : R \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $f_x = f(x, \cdot)$ für jedes $x \in R$ Riemann-integrierbar über Q . Dann ist auch $I(x) = \int_Q f_x(y) dy$ über R Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\boxed{\int_{R \times Q} f(x, y) d(x, y) = \int_R \left(\int_Q f(x, y) dy \right) dx.}$$

Beweis Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir Partitionen P' von R und P'' von Q derart, dass die Partition

$$P := P' \times P'' = \{S' \times S'' : S' \in P', S'' \in P''\}$$

von $R \times Q$ nach Lemma 5.3 die Abschätzung

$$O_{R \times Q}(P, f) - U_{R \times Q}(P, f) < \varepsilon$$

gestattet. Dann gilt

$$\begin{aligned} U_{R \times Q}(P, f) &= \sum_{S \in P} \inf_S f \cdot |S| = \sum_{S'} \sum_{S''} \inf_{S' \times S''} f \cdot |S'| \cdot |S''| \\ &= \sum_{S'} \sum_{S''} \inf_{x \in S'} \left(\inf_{S''} f_x \right) \cdot |S'| \cdot |S''|. \end{aligned}$$

Da $\sum_{S''} \inf_{S''} (\dots) \leq \inf_{S'} \sum_{S''} (\dots)$, schätzen wir wie folgt nach oben ab:

$$\begin{aligned} U_{R \times Q}(P, f) &\leq \sum_{S'} \inf_{x \in S'} \left(\underbrace{\sum_{S''} \inf_{S''} f_x \cdot |S''|}_{\leq I(x)} \right) |S'| \\ &\leq U_R(P', I(\cdot)) \\ &\leq O_R(P', I(\cdot)) \\ &\leq \dots \leq O_{R \times Q}(P, f). \end{aligned}$$

Nach Wahl der Partition P und Lemma 5.3 folgt, dass $I(x)$ auf R integrierbar ist. Ferner erhält man die gewünschte Formel

$$\int_R I(x) dx = \int_{R \times Q} f(x, y) d(x, y).$$

■

Korollar 5.6 Für die Riemann-integrierbare Funktion $f : R \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ existiere für jedes $x \in R$ das Riemann-Integral $\int_Q f(x, y) dy$ sowie für jedes $y \in Q$ das Riemann-Integral $\int_R f(x, y) dx$. Dann gilt

$$\int_R \left(\int_Q f(x, y) dy \right) dx = \int_{R \times Q} f(x, y) d(x, y) = \int_Q \left(\int_R f(x, y) dx \right) dy.$$

Bemerkung

- (1) Unter der Voraussetzung von Korollar 5.6 ist der Wert der iterierten Integrale $\int_R \int_Q$ und $\int_Q \int_R$ unabhängig von der Reihenfolge.
- (2) Unter geeigneten Voraussetzungen (z.B. für stetige Funktionen) gestattet Korollar 5.6 die Berechnung des Integrals von f über dem Rechteck $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ durch die Auswertung von n eindimensionalen Integralen:

$$\int_R f(x) dx = \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_1 \right) \cdots dx_{n-1} \right) dx_n.$$

- (3) Die Riemann-Integrierbarkeit von f über $R \times Q$ impliziert nicht, dass f_x für jedes $x \in R$ Riemann-integrierbar ist, s. dazu Satz 5.8.
- (4) Der Satz von Fubini gilt bei Benutzung des Lebesgue-Integrals unter wesentlich schwächeren Voraussetzungen.

Definition

- (1) Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *(Lebesgue)-Nullmenge* oder Menge vom *(Lebesgue)-Maß 0*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ abzählbar viele (!) abgeschlossene Rechtecke $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit

$$M \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} R_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{\infty} |R_i| < \varepsilon$$

gibt. [Offensichtlich dürfen die Rechtecke auch offen gewählt werden, denn zu einem abgeschlossenen Rechteck R und zu $\delta > 0$ gibt es ein offenes Rechteck $\overset{\circ}{R}_\delta$ mit $\overset{\circ}{R} \subset R \subset \overset{\circ}{R}_\delta$ und $|\overset{\circ}{R}_\delta| := |R_\delta| = (1 + \delta)|R|$.

- (2) Die Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Jordan-Nullmenge*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele (!) abgeschlossene Rechtecke $R_1, \dots, R_N \subset \mathbb{R}^n$ ($N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$) mit

$$M \subset \bigcup_{i=1}^N R_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^N |R_i| < \varepsilon$$

gibt.

Lemma 5.7 (1) M Jordan-Nullmenge $\Rightarrow M$ Lebesgue-Nullmenge.

(2) M_j Lebesgue-Nullmenge für jedes $j \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{j=0}^{\infty} M_j$ ist Lebesgue-Nullmenge.

(3) M_j Jordan-Nullmenge für $j = 1, \dots, N \Rightarrow \bigcup_{j=1}^N M_j$ ist Jordan-Nullmenge.

(4) $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakte (!) Lebesgue-Nullmenge $\Rightarrow M$ ist sogar Jordan-Nullmenge.

Beweis Die Aussage (1) ist trivial. Zum Beweis von (2) betrachten wir Lebesgue-Nullmengen M_j , $j \in \mathbb{N}$, und geben $\varepsilon > 0$ vor. Dann gibt es zu M_j Rechtecke R_j^i , $i \in \mathbb{N}$, mit

$$M_j \subset \bigcup_i R_j^i, \quad \sum_{i=0}^{\infty} |R_j^i| < \frac{\varepsilon}{2^j}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Folglich wird $M = \bigcup_j M_j$ durch die Vereinigung der abzählbar vielen Rechtecke R_j^i , $j \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}$, überdeckt. Außerdem gilt für jede endliche Teilauswahl der R_j^i

$$\sum_{i,j} |R_j^i| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} |R_j^i| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = 2\varepsilon.$$

Also ist $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} |R_j^i| \leq 2\varepsilon$ unabhängig von der gewählten Abzählung der R_j^i .

(3) wird wie (2) bewiesen. In (4) betrachten wir zu $\varepsilon > 0$ offene (!) Rechtecke $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $M \subset \bigcup_i R_i$ und $\sum_i |R_i| < \varepsilon$. Da M kompakt ist, gibt es bereits endlich viele Rechtecke R_{i_1}, \dots, R_{i_N} mit $M \subset \bigcup_{j=1}^N R_{i_j}$. Für diese R_{i_j} gilt zusätzlich $\sum_{j=1}^N |R_{i_j}| < \varepsilon$. ■

Folgerung Endliche Punktfolgen im \mathbb{R}^n sind Jordan-Nullmengen, abzählbare Punktfolgen wie z.B. $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ sind Lebesgue-Nullmengen. Der Rand eines Rechtecks ist eine Jordan-Nullmenge: Für eine Seitenfläche von R gilt

$$\{a_1\} \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset R' := [a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

und $|R'| \leq 2\varepsilon \cdot \prod_{j=2}^n (b_j - a_j)$ für jedes $\varepsilon > 0$.

Hauptsatz 5.8 (Lebesguesches Integrierbarkeitskriterium für Riemann-Integrale). Sei $R \subset \mathbb{R}^n$ ein Rechteck und sei $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Genau dann ist f auf R Riemann-integrierbar, wenn f **fast überall stetig** ist, d.h., es gibt eine Lebesgue-Nullmenge $M \subset R$, so dass f in allen Punkten von $R \setminus M$ stetig ist:

$$\forall x \in R \setminus M \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall y \in B_\delta(x) \cap R.$$

Beweis: „ \Leftarrow “ Sei $M \subset R$ die Lebesgue-Nullmenge aller Unstetigkeitspunkte von f . Dann gibt es zu gewähltem $\varepsilon > 0$ höchstens abzählbar viele offene (!) Rechtecke $(R_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit

$$M \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} R_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{\infty} |R_j| < \varepsilon.$$

Weiterhin gibt es zu jedem Stetigkeitspunkt $x \in R \setminus M$ von f ein offenes (!) Rechteck U_x mit $x \in U_x$, so dass

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad \forall x', x'' \in \overline{U_x} \cap R$$

gilt. Folglich ist $R \subset \bigcup_j R_j \cup \bigcup_{x \in R \setminus M} U_x$. Da aber R kompakt ist, reichen endlich viele R_j , $1 \leq j \leq N$, und $U_i = U_{x_i}$, $1 \leq i \leq N$, zur Überdeckung von R aus:

$$R \subset \bigcup_{j=1}^N R_j \cup \bigcup_{i=1}^N U_i.$$

Um das Riemannsche Integrabilitätskriterium in Lemma 5.3 zu erfüllen, wähle man eine Partition P von R derart, dass jedes $S \in P$ vollständig in (mindestens) einer Menge $\overline{R_j}$ oder $\overline{U_i}$ liegt. Dann gilt

$$O(P, f) - U(P, f) = \sum_{S \in P} (\sup_S f - \inf_S f) \cdot |S| =: \sum_1 + \sum_2,$$

wobei

$$\begin{aligned} \sum_1 &= \text{Summe aller Terme, für die } S \text{ in einem } \overline{R_j} \text{ liegt,} \\ \sum_2 &= \text{Summe aller anderen Terme.} \end{aligned}$$

Jetzt werden \sum_1 und \sum_2 wie folgt abgeschätzt:

$$\begin{aligned} \sum_1 &\leq 2\|f\|_{\infty} \sum_j \sum_{S \subset \overline{R_j}} |S| \leq 2\|f\|_{\infty} \sum_j |R_j| < 2\varepsilon\|f\|_{\infty}, \\ \sum_2 &\leq \varepsilon \sum_{S \in P} |S| = \varepsilon|R|; \end{aligned}$$

dabei wird für \sum_2 ausgenutzt, dass jede dort auftretende Menge S ganz in einer der Mengen $\overline{U_i}$ liegt und folglich $\sup_S f - \inf_S f \leq \varepsilon$ gilt. Fasst man beide Abschätzungen zusammen, erhält man $O(P, f) - U(P, f) < \varepsilon(2\|f\| + |R|)$ und somit die Riemann-Integrierbarkeit von f . ■

„ \Rightarrow “ Für die Riemann-integrierbare Funktion $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten wir die Menge M aller Unstetigkeitspunkte. Nun ist f genau dann in x unstetig, wenn

$$w(x) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup\{|f(x') - f(x'')| : x', x'' \in B_{\delta}(x) \cap R\} > 0$$

ist (beachte, dass der obige Ausdruck $\sup\{\dots\}$ in $\delta > 0$ monoton wachsend ist; folglich existiert der Limes für $\delta \rightarrow 0+$). Also ist

$$M = \{x \in R : w(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in R : w(x) \geq \frac{1}{k}\} =: \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k.$$

Nach Lemma 5.7 (2) reicht es jetzt, die folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung: $M_k = \{x \in R : w(x) \geq \frac{1}{k}\}$ ist Lebesgue-Nullmenge (und sogar eine Jordan-Nullmenge).

Beweis: Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es nach Lemma 7.3 eine Partition P von R mit

$$O(P, f) - U(P, f) < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Zuerst betrachten wir solche $x \in M_k$, die im Inneren $\overset{\circ}{S}$ eines Rechtecks $S \in P$ liegen. Nach Definition von $w(x)$ folgt die Abschätzung

$$(\sup_S f - \inf_S f) \geq w(x) \geq \frac{1}{k}.$$

Dann erhalten wir für $P' = \{S \in P : \exists x \in M_k \text{ mit } x \in \overset{\circ}{S}\}$ die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{S \in P'} |S| &\leq \sum_{S \in P'} (\sup_S f - \inf_S f) |S| \\ &\leq O(P, f) - U(P, f) < \frac{\varepsilon}{2k} \end{aligned}$$

und folglich

$$\sum_{S \in P'} |S| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zusätzlich gibt es noch Punkte $x \in M_k$, die auf dem Rand ∂S eines $S \in P$ liegen. Zusammengefasst gilt

$$M_k \subset \bigcup_{S \in P'} \cup \bigcup_{S \in P} \partial S,$$

wobei $\bigcup_S \partial S$ eine Jordan-Nullmenge ist. Also kann M_k durch endlich viele Rechtecke mit Gesamtvolumen $< \varepsilon$ überdeckt werden. ■

Folgerung Jede stetige Funktion $f : R \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist Riemann-integrierbar.

Satz 5.9 Seien f und g Riemann-integrierbare Funktionen auf dem Rechteck $R \subset \mathbb{R}^n$.

(1) Die Funktionen $|f|$, f^+ , f^- , $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, $f \cdot g$ sind Riemann-integrierbar.

$$(2) \quad \left| \int_R f(x) dx \right| \leq \int_R |f(x)| dx.$$

(3) Gilt $f = g$ **fast überall** in R , d.h., es gibt eine Lebesgue-Nullmenge $M \subset R$ mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in R \setminus M$, so ist

$$\int_R f(x) dx = \int_R g(x) dx.$$

Achtung: Aussage (3) besagt *nicht*, dass aus der Integrierbarkeit von f und der Eigenschaft $f = g$ fast überall die Integrierbarkeit von g folgt.

Beweis (1) beweist man mit Satz 5.8 oder wie in der Analysis I (die Untersumme $U(P, f)$ ist das Integral einer „Treppenfunktion“ $\varphi \leq f$, die konstant auf jedem $\overset{\circ}{S}$, $S \in P$, ist). (2) folgt mit Satz 5.4.

(3) Wir wenden die Technik des Beweisteils „ \Leftarrow “ von Satz 5.8 auf $h = f - g$ an und zeigen $\int_R h dx = 0$. Sei M_f bzw. M_g die Menge der Unstetigkeitspunkte von f bzw. g , und sei

$$M = M_f \cup M_g \cup \{x \in R : f(x) \neq g(x)\}.$$

Da M nach Satz 5.8 eine Lebesgue-Nullmenge ist, gibt es offene Rechtecke R_j mit

$$M \subset \bigcup_j R_j, \quad \sum_j |R_j| < \varepsilon.$$

Ferner finden wir zu jedem $x \in R \setminus M$, in dem also h stetig und $h(x) = 0$ ist, ein offenes Rechteck U_x mit $x \in U_x$ und

$$|h(y)| < \varepsilon \quad \text{für alle } y \in \overline{U}_x.$$

Da R kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung:

$$R \subset \bigcup_{j=1}^{N_1} R_j \cup \bigcup_{i=1}^{N_2} U_i.$$

Dazu passend wird eine Partition P von R gewählt, so dass jedes $S \in P$ ganz in einem \overline{R}_j oder in einem \overline{U}_i liegt. Jetzt erhalten wir die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} |O(P, h)| &\leq \left| \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{S \in P, S \subset \overline{R}_j} \sup_S h \cdot |S| \right| + \left| \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{S \in P, S \subset \overline{U}_i} \sup_S h \cdot |S| \right| \\ &\leq \|h\|_\infty \cdot \varepsilon + \varepsilon |R|. \end{aligned}$$

Analog zeigt man $|U(P, h)| \leq \varepsilon(\|h\|_\infty + |R|)$. Folglich verschwindet das Integral von h über R . ■

6 Das Riemann-Integral über Jordan-messbaren Mengen

Definition

- (1) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Dann wird die Fortsetzung von f durch 0 auf \mathbb{R}^n mit $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet:

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

- (2) Sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $R \supset A$ ein abgeschlossenes Rechteck. Eine beschränkte Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *(Riemann-)integrierbar*, falls die Fortsetzung f_A auf R Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall ist

$$\int_A f(x) dx := \int_R f_A(x) dx$$

das *(Riemann-)Integral* von f auf A . [Man sieht leicht, dass diese Definition nicht von der Wahl des Rechtecks $R \supset A$ abhängt.]

- (3) Eine nichtleere beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Jordan-messbar*, falls ihre charakteristische Funktion $\chi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, also $\chi_A(x) = 1$ für $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ für $x \notin A$, Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall ist

$$|A| := \int_A 1 dx = \int_R \chi_A(x) dx$$

der n -dimensionale *Jordan-Inhalt* (Flächeninhalt, Volumen) von A . Schließlich sei $|\emptyset| := 0$.

Lemma 6.1 *Eine beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn ∂A eine Nullmenge im Sinne von Lebesgue oder von Jordan ist.*

Beweis Nach Wahl eines abgeschlossenen Rechtecks $R \supset A$ besagen die Definition der Jordan-Messbarkeit und Satz 5.8, dass A genau dann Jordan-messbar ist, wenn die Menge der Unstetigkeitspunkte von χ_A in R , also die Menge ∂A , eine Lebesgue-Nullmenge ist. Da $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ abgeschlossen und folglich sogar kompakt ist, ist nach Lemma 5.7 A genau dann Jordan-messbar, falls ∂A eine Jordan-Nullmenge ist. ■

Satz 6.2 *Sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar. Eine beschränkte Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann auf A Riemann-integrierbar, wenn sie auf A fast überall stetig ist.*

Insbesondere ist eine stetige Funktion auf einer kompakten Jordan-messbaren Menge immer Riemann-integrierbar.

Beweis „ \Rightarrow “ Ist f auf A integrierbar, so ist nach Definition f_A auf einem Rechteck $R \supset A$ integrierbar. Nach Satz 5.8 ist die Menge der Unstetigkeitsstellen M_{f_A} von f_A eine Lebesgue-Nullmenge in R . Folglich ist auch die Menge der Unstetigkeitsstellen von f in A eine Lebesgue-Nullmenge.

„ \Leftarrow “ Nach Voraussetzung sind die Menge der Unstetigkeitsstellen M_f von f in A und auch ∂A Lebesgue-Nullmengen. Folglich ist auch $M_{f_A} \subset M_f \cup \partial A$ in R eine Nullmenge, f also integrierbar. ■

Satz 6.3 Sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, und seien $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf A sowie $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch

$$f + g, cf, f^+, f^-, |f|, \max(f, g), \min(f, g)$$

Riemann-integrierbar auf A . Ferner gilt

$$\int_A (f + g) dx = \int_A f dx + \int_A g dx, \quad \int_A cf dx = c \int_A f dx$$

und

$$\left| \int_A f(x) dx \right| \leq \int_A |f(x)| dx.$$

Beweis Alle Aussagen folgen sofort aus Satz 5.4. Man beachte z.B. $(f + g)_A = f_A + g_A$, $(f^+)_A = (f_A)^+$ etc. Ist $R \supset A$ ein abgeschlossenes Rechteck, gilt die Abschätzung

$$\int_A f dx = \int_R f_A dx \leq \int_R |f_A| dx = \int_R |f|_A dx = \int_A |f| dx.$$

Ebenso folgt $-\int_A f \leq \int_A |f|$. ■

Lemma 6.4 Sind $A, B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, so sind auch $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$ Jordan-messbar.

Beweis Wegen $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$, $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$ und $\partial(A \setminus B) \subset \partial A \cup \partial B$ folgt die Behauptung mit Lemma 6.1. ■

Satz 6.5 Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbare Mengen, und sei $f : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$ auf A und auf B Riemann-integrierbar. Dann ist f auf $A \cup B$ und auf $A \cap B$ Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\boxed{\int_{A \cup B} f dx = \int_A f dx + \int_B f dx - \int_{A \cap B} f dx.}$$

Im Falle $A \cap B = \emptyset$ gelte dabei die Definition $\int_{\emptyset} f dx = 0$.

Beweis Nach Satz 6.2 und Lemma 6.4 ist f auf $A \cup B$ und auf $A \cap B$ Riemann-integrierbar.

Sei zuerst $A \cap B = \emptyset$ und R ein abgeschlossenes Rechteck mit $A \cup B \subset R$. Da $f_{A \cup B} = f_A + f_B$, gilt

$$\int_{A \cup B} f = \int_R f_{A \cup B} = \int_R f_A + \int_R f_B = \int_A f + \int_B f.$$

Falls $A \cap B \neq \emptyset$, benutzen wir die Mengenidentitäten

$$\begin{aligned} A &= (A \setminus B) \dot{\cup} (A \cap B), & B &= (B \setminus A) \dot{\cup} (A \cap B), \\ A \cup B &= (A \setminus B) \dot{\cup} (B \setminus A) \dot{\cup} (A \cap B); \end{aligned}$$

dabei bedeutet $\dot{\cup}$, dass die Mengen jeweils paarweise disjunkt sind. Jetzt impliziert der zuvor bewiesene Fall

$$\int_A f + \int_B f = \underbrace{\left(\int_{A \setminus B} f + \int_{A \cap B} f \right) + \left(\int_{B \setminus A} f + \int_{A \cap B} f \right)}_{= \int_{A \cup B} f} = \int_{A \cup B} f + \int_{A \cap B} f.$$

■

Korollar 6.6 Für Jordan-messbare Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B|, \\ A \subset B &\Rightarrow |A| \leq |B|. \end{aligned}$$

Korollar 6.7 Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbare, sich nicht-überlappende Mengen, d.h., $A \cap B \subset \partial A \cup \partial B$ (oder äquivalent $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \emptyset$). Dann gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$. Ist $f : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$ auf A und auf B Riemann-integrierbar, gilt

$$\int_{A \cup B} f \, dx = \int_A f \, dx + \int_B f \, dx.$$

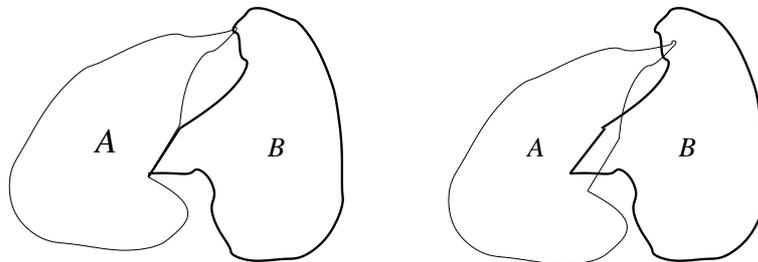


Abb. 6.1 Überlappende und nicht-überlappende Mengen

Beweis Ist $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \emptyset$, folgt

$$A \cap B \subset (\overset{\circ}{A} \cup \partial A) \cap (\overset{\circ}{B} \cup \partial B) \subset (\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}) \cup \partial A \cup \partial B = \partial A \cup \partial B.$$

Wegen $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset A \cap B$ folgt im Falle $A \cap B \subset \partial A \cup \partial B$ überdies $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \emptyset$. Also sind die Definitionen für nicht-überlappende Mengen äquivalent zueinander.

Zum Beweis der Integralidentität ist nach Satz 6.5 noch $\int_{A \cap B} f \, dx = 0$ zu zeigen. Nach Voraussetzung ist hier $A \cap B (\subset \partial A \cap \partial B)$ eine Jordan-Nullmenge. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es also abgeschlossene Rechtecke R_1, \dots, R_N , so dass

$$A \cap B \subset \bigcup_{i=1}^N R_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^N |R_i| < \varepsilon$$

gilt. Dann folgt mit $M = \|f\|_\infty < \infty$ und Korollar 6.6

$$\left| \int_{A \cap B} f \right| \leq M |A \cap B| \leq M \left| \bigcup_{i=1}^N R_i \right| \leq M \sum_{i=1}^N |R_i| < M\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt die Behauptung. ■

Bemerkung 6.8 (1) *Der Beweis von Korollar 6.7 zeigt, dass Integrale über Jordan-Nullmengen gleich 0 sind. Insbesondere ist $|A| = 0$ für jede Jordan-Nullmenge A .*

(2) *Wird der Integrand auf einer Jordan-Nullmenge abgeändert, bleibt der Wert des Integrals erhalten.*

(3) *Da für eine Jordan-messbare Menge A der Rand eine Nullmenge ist, gilt*

$$\int_{\overline{A}} f \, dx = \int_A f \, dx = \int_{\overset{\circ}{A}} f \, dx.$$

Die folgenden Sätze beschäftigen sich mit der Konstruktion von Jordan-messbaren Mengen und folglich mit der Konstruktion von Jordan-Nullmengen als Rand eines Integrationsgebietes.

Satz 6.9 *Die Funktion f sei auf der Jordan-messbaren Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ Riemann-integrierbar. Dann ist der Graph*

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in A\}$$

eine Jordan-Nullmenge im \mathbb{R}^{n+1} .

Beweis Wähle ein abgeschlossenes Rechteck $R \supset A$ und $\varepsilon > 0$. Da f_A auf R integrierbar ist, gibt es nach Lemma 5.3 eine Partition $P = \{S\}$ von R , so dass

$$O_R(P, f) - U_R(P, f) = \sum_{S \in P} (\sup_S f - \inf_S f) |S| < \varepsilon$$

gilt. Da offenbar die Vereinigung aller kartesischen Produkte $S \times [\inf_S f, \sup_S f] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Überdeckung von $G(f_A)$ aus endlich vielen abgeschlossenen Rechtecken ist, folgt $|G(f)| \leq |G(f_A)| < \varepsilon$. ■

Lemma 6.10 *Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan-Nullmenge und $g : A \rightarrow \mathbb{R}^q$ mit $q \geq n$ Lipschitz-stetig, ist auch $g(A)$ eine Jordan-Nullmenge im \mathbb{R}^q . (Für $q < n$ ist diese Aussage i. a. falsch)*

Beweis Zuerst überlegt man sich, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung von A durch endlich viele kompakte Würfel C_k , $1 \leq k \leq N$, gleicher Kantenlänge mit der Eigenschaft $\sum_{k=1}^N |C_k| < \varepsilon$ gibt. Denn es gibt eine Überdeckung von A durch endlich viele abgeschlossene Rechtecke R_i , $1 \leq i \leq M$, mit $\sum_{i=1}^M |R_i| < \varepsilon \cdot 2^{-n}$. Bezeichnet $\delta > 0$ die kleinste Kantenlänge aller R_i , so gibt es zu jedem R_j endlich viele Würfel $C_{k,j}$ der Kantenlänge δ mit $R_j \subset \bigcup_k C_{k,j}$ und $\sum_k |C_{k,j}| < 2^n |R_j|$. Folglich überdecken die Würfel $(C_{k,j})_{k,j}$ die Menge A , und es gilt $\sum_{k,j} |C_{k,j}| < \varepsilon$.

Es sei $L \geq 0$ eine Lipschitzkonstante von g , wenn im \mathbb{R}^n und im \mathbb{R}^q jeweils die Maximumsnorm $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ benutzt wird. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ werde A durch kompakte Würfel (C_k) , $k = 1, \dots, N$, der Kantenlänge $\delta < 1$ überdeckt, und es gelte

$$\sum_{k=1}^N |C_k| = N\delta^n < \varepsilon.$$

Ist $A \cap C_k \neq \emptyset$, fixieren wir einen Punkt $x_k \in A \cap C_k$. Dann gilt für alle $x \in A \cap C_k$ wegen $\|x - x_k\| \leq \delta$

$$\|g(x) - g(x_k)\| \leq L\delta.$$

Also liegt $g(A \cap C_k)$ in einem Würfel $Q_k \subset \mathbb{R}^q$ der Kantenlänge $2L\delta$. Zusammenfassend erhält man

$$g(A) = \bigcup_k g(A \cap C_k) \subset \bigcup_k Q_k$$

und, da $\delta < 1$ sowie $q \geq n$,

$$\sum_{k=1}^N |Q_k| \leq N(2L\delta)^q = (2L)^q \cdot N\delta^n \cdot \delta^{q-n} < (2L)^q \varepsilon.$$

■

Lemma 6.11 *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $g : G \rightarrow \mathbb{R}^q$ mit $q \geq n$ stetig differenzierbar. Dann ist das Bild $g(A)$ jeder kompakten Jordan-Nullmenge $A \subset G$ eine Jordan-Nullmenge im \mathbb{R}^q .*

Beweis Da $A \subset G$ kompakt ist, kann A durch endlich viele kompakte Würfel $C_k \subset G$ überdeckt werden. Nach Lemma 6.10 ist $g(A \cap C_k)$ als Bild von $A \cap C_k$ unter der Lipschitz-stetigen Funktion $g|_{C_k}$ eine Jordan-Nullmenge. Wegen $g(A) = \bigcup_k g(A \cap C_k)$ folgt nun die Behauptung. ■

Satz 6.12 Sei $g : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive, stetig differenzierbare Funktion auf einer offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ und sei die Funktionalmatrix $Dg(x)$ für jedes $x \in G$ invertierbar. Dann ist das Bild jeder kompakten Jordan-messbaren Menge unter g wieder kompakt und Jordan-messbar.

Beweis Unter den Voraussetzungen an g bildet g offene Mengen auf offene Mengen ab, d.h., die Inverse $g^{-1} : g(G) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig.

Sei $A \subset G$ kompakt und Jordan-messbar. Dann ist $g(A)$ kompakt und $\partial g(A) \subset g(\overline{A}) = g(A) \subset g(G)$. Da ∂A eine Jordan-Nullmenge ist und folglich nach Lemma 6.10 auch $g(\partial A)$ eine Jordan-Nullmenge ist, reicht es nach Lemma 6.1,

$$\partial g(A) \subset g(\partial A)$$

zu zeigen (tatsächlich gilt sogar $\partial g(A) = g(\partial A)$).

Ist $y \in \partial g(A) \subset g(G)$, so gibt es, da $g(G)$ offen ist, Folgen $(y_k) \subset g(A)$ und $(y'_k) \subset g(G) \setminus g(A) = g(G \setminus A)$, die für $k \rightarrow \infty$ gegen y konvergieren. Die Stetigkeit von g^{-1} impliziert, dass die Folgen $(g^{-1}(y_k)) \subset A$ und $(g^{-1}(y'_k)) \subset G \setminus A$ für $k \rightarrow \infty$ beide gegen $g^{-1}(y) \in \partial A$ konvergieren. Also folgt $g^{-1}(y) \in \partial A$ und somit $y \in g(\partial A)$. ■

Satz 6.13 Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ Riemann-integrierbar. Dann ist die Ordinatenmenge

$$H(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : x \in A, \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Jordan-messbar und besitzt das $(n + 1)$ -dimensionale Volumen

$$|H(f)| = \int_A f(x) dx.$$

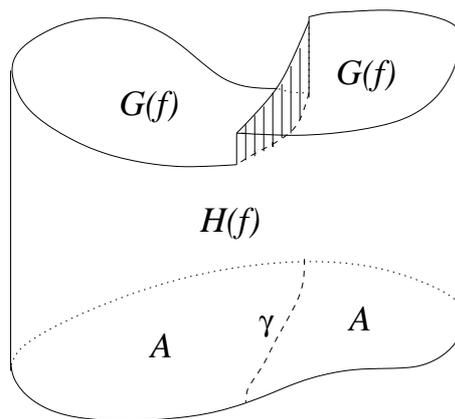


Abb. 6.2 Ordinatenmenge von $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$

Beweis Wir zeigen zuerst die Jordan-Messbarkeit von $H(f)$ und definieren $M := \sup_A f$. Ist f in einem Punkt $x \in \overset{\circ}{A}$ stetig, so folgt $(x, y) \in H(f)^\circ$ für alle $0 < y < f(x)$. Aufgrund dieser Bemerkung sieht man die Inklusion

$$\partial H(f) \subset (\partial A \times [0, M]) \cup (A \times \{0\}) \cup G(f) \cup \{x \in A : x \text{ ist Unstetigkeitsstelle von } f\} \times [0, M].$$

Dabei ist $\partial A \times [0, M]$ eine Jordan-Nullmenge im \mathbb{R}^{n+1} , da es für $\partial A \subset \mathbb{R}^n$ gilt. Nach Satz 6.9 sind $A \times \{0\}$ und $G(f)$ Jordan-Nullmengen. Schließlich ist nach Satz 5.8 die vierte Menge in der obigen Inklusion eine Lebesgue-Nullmenge. Also ist $\partial H(f)$ eine Lebesgue-Nullmenge und aufgrund der Kompaktheit sogar eine Jordan-Nullmenge. Somit folgt die Messbarkeit von $H(f)$.

Zur Bestimmung des Integrals wähle man ein kompaktes Rechteck $R \supset A$. Da $H(f) \subset R \times [0, M]$, gilt definitionsgemäß und nach dem Satz von Fubini

$$|H(f)| = \int_{R \times [0, M]} \chi_{H(f)}(x, y) d(x, y) = \int_R \left(\int_0^M \chi_{H(f)}(x, y) dy \right) dx.$$

Da das innere Integral für jedes $x \in A$ den Wert $\int_0^M \chi_{[0, f(x)]}(y) dy = f(x)$ hat und für $x \in R \setminus A$ verschwindet, folgt die Behauptung $|H(f)| = \int_A f(x) dx$. ■

Definition Ein (zweidimensionaler) *Normalbereich* bzgl. der x -Achse ist eine Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ der Form

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\};$$

dabei seien $a < b$ und $\varphi, \psi \in C^0[a, b]$ mit $\varphi \leq \psi$ gegeben.

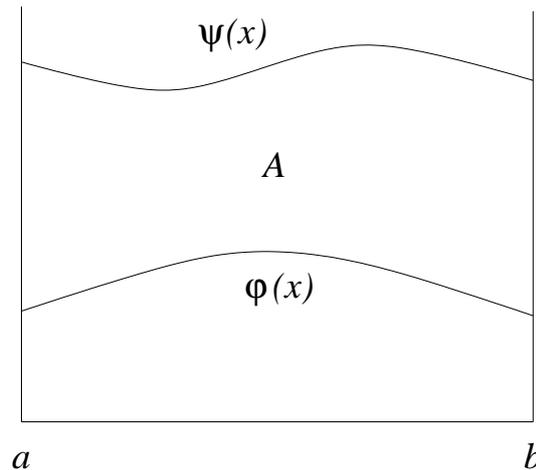


Abb. 6.3 Ein Normalbereich

Satz 6.14 Sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Normalbereich $A = \{(x, y) : x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$. Dann gilt

$$\int_A f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx .$$

Beweis Wie im Beweis von Satz 6.13 sieht man, dass A Jordan-messbar ist. Sei $m = \min \varphi$ und $M = \max \psi$ sowie $R = [a, b] \times [m, M]$. Dann liefert der Satz von Fubini, dass

$$\begin{aligned} \int_A f(x, y) d(x, y) &= \int_R f_A(x, y) d(x, y) \\ &= \int_a^b \left(\int_m^M f_A(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

gilt. ■

7 Die Substitutionsregel

Aus Analysis I ist die Substitutionsregel für Integrale bekannt: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Bijektion des Intervalls $[\alpha, \beta]$ auf das Intervall $[a, b]$ mit der Eigenschaft $g' > 0$. Dann gilt

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = \int_{[\alpha,\beta]} f(g(t))g'(t) dt .$$

Die unterschiedlichen “infinitesimalen Inkremente” dx und $g'(t) dt$ können wie folgt interpretiert werden. Aus $x = g(t)$ folgt $\frac{dx}{dt} = g'(t)$, also “ $dx = g'(t) dt$ ”: das Intervall $[t, t + dt]$ der Länge dt wird durch g auf das Intervall

$$g([t, t + dt]) = [g(t), g(t + dt)] \doteq [g(t), g(t) + g'(t) dt] = [x, x + dx]$$

der Länge $dx = g'(t) dt$ abgebildet. Ist $g' < 0$ und folglich $g(\alpha) = b$, $g(\beta) = a$, bleibt obige Formel in der etwas allgemeineren Form

$$\int_{g([\alpha,\beta])} f(x) dx = \int_{[\alpha,\beta]} f(g(t))|g'(t)| dt$$

gültig; dabei bezeichnen $[\alpha, \beta]$ bzw. $g([\alpha, \beta])$ die Intervalle mit den Endpunkten α und β bzw. a und b unabhängig von der Orientierung $\alpha < \beta$ oder $\beta < \alpha$ bzw. $a < b$ oder $b < a$.

Es stellt sich die Frage, wie im n -dimensionalen Analogon das infinitesimale Volumenstück $dx = dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n$ in t -Variablen unter einer C^1 -Abbildung $x = g(t)$ geschrieben werden kann.

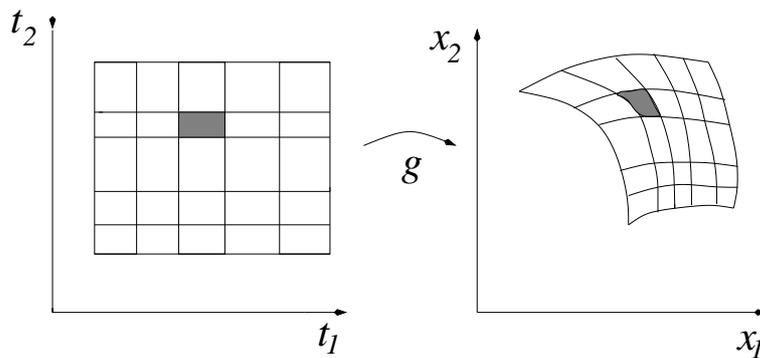


Abb. 7.1 Transformation einer Partition

Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängige Vektoren, und sei $V(a_1, \dots, a_n)$ das n -dimensionale “Volumen” des durch a_1, \dots, a_n aufgespannten Parallelepipedes

$$P(a_1, \dots, a_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i a_i : 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, \dots, n \right\} .$$

Dann gelten offensichtlich die folgenden Eigenschaften:

$$V(a_1, \dots, \lambda a_i, \dots, a_n) = \lambda V(a_1, \dots, a_n) \text{ für } \lambda \geq 0 \quad (V1)$$

$$\begin{aligned} V(a_1, \dots, a_i + a'_i, \dots, a_n) &= V(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) \\ &\quad + V(a_1, \dots, a'_i, \dots, a_n) \end{aligned} \quad (V2)$$

$$V(a_1, \dots, a_i, \dots, a_i, \dots, a_n) = 0 \quad (V3)$$

$$V(e_1, \dots, e_n) = 1 \quad (V4)$$

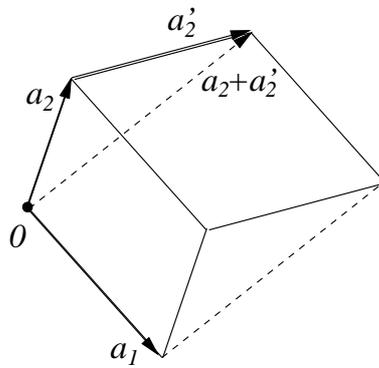


Abb. 7.2 Parallelegramme

(V3) besagt, dass ein entartetes Parallelepipied, in dem zwei aufspannende Vektoren gleich sind, ein verschwindendes Volumen besitzt. Aus (V2) mit $a'_i = -a_i$ folgt wegen $V(a_1, \dots, 0, \dots, a_n) = 0$, s. (V1) mit $\lambda = 0$, dass (V1) sogar für $\lambda < 0$ gilt. Die Abbildung V nimmt also auch negative Werte an und stimmt *nicht* mit dem in den Abschnitten 1 und 2 betrachteten Volumen $|P(a_1, \dots, a_n)|$ überein. Jedoch besagen (V1) (für alle $\lambda \in \mathbb{R}$) und (V2), dass

$$V : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

in jeder Komponente linear, also *multilinear* ist.

Aus der *Linearen Algebra* weiß man, dass es genau eine multilineare Abbildung gibt, die (V1) - (V3) zusammen mit der Normierung (V4) erfüllt, nämlich die *Determinante*

$$\det : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Es gilt also $V \equiv \det$.

Sei $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung (Matrix) mit den Spaltenvektoren

$$a_i := Ae_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Dann bildet A den Einheitswürfel $P(e_1, \dots, e_n)$ auf das Parallelepiped

$$A(P(e_1, \dots, e_n)) = P(Ae_1, \dots, Ae_n) = P(a_1, \dots, a_n)$$

ab. Man definiert jetzt die Determinante der linearen Abbildung A durch

$$\det A := V(a_1, \dots, a_n).$$

Die Größe $|\det A|$ ist also das wirkliche Volumen des Parallelepipeds $P(a_1, \dots, a_n)$.

Sei A eine invertierbare lineare Abbildung, also mit $\det A \neq 0$, und sei

$$V'(b_1, \dots, b_n) = \frac{1}{\det A} V(Ab_1, \dots, Ab_n).$$

Offensichtlich erfüllt V' die Axiome (V1) - (V4). Aufgrund der obigen Eindeutigkeitsaussage folgt $V' \equiv \det = V$. Es gilt also

$$V(Ab_1, \dots, Ab_n) = \det A \cdot V(b_1, \dots, b_n);$$

das "Volumen" des Parallelepipeds $P(Ab_1, \dots, Ab_n) = A P(b_1, \dots, b_n)$ ist gleich dem "Volumen" von $P(b_1, \dots, b_n)$ multipliziert mit $\det A$. Wir schließen:

$|\det A|$ ist der Skalierungsfaktor für das n -dimensionale Volumen unter der linearen Abbildung A .

Für das Rechnen mit Determinanten zitieren wir verschiedene Ergebnisse der Linearen Algebra.

Entwicklungssatz von Laplace Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ und für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ sei $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n-1, n-1}$ die Matrix, die aus A durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte entsteht. Dann gilt für fest gewähltes $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

(Entwicklung nach der i -ten Zeile) und für festes $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

(Entwicklung nach der j -ten Spalte.)

Beweisidee: Schreibt man für $i = 1$ den ersten Zeilenvektor als Linearkombination $\sum_{j=1}^n a_{1j}e_j^T$, gilt aufgrund der Multilinearität der Determinante

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^n a_{1j} \det \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & * & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & * & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{1j} (-1)^{1+j} \det \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & & A_{1j} \\ * & & & \end{array} \right). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde benutzt, dass sich der Wert einer Determinante beim Vertauschen zweier Spalten (oder zweier Zeilen) um den Faktor (-1) ändert. Anschließend liefert die Eindeutigkeitsaussage für Determinanten in $\mathbb{R}^{n-1, n-1}$

$$\det \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & & A_{ij} \\ * & & & \end{array} \right) = \det A_{ij}.$$

□

Beispiele

- (1) Für $n = 2$ gilt $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \det(d) - b \det(c) = ad - bc$.
- (2) Für $n = 3$ stimmt die Entwicklung nach der ersten Spalte mit der zuvor benutzten Definition der Determinante überein.
- (3) Mit Induktion über n zeigt man

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = \dots = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Produktsatz Für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt

$$\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B.}$$

Beweisidee Wegen $B = (Be_1, \dots, Be_n)$ gilt definitionsgemäß

$$\begin{aligned} \det(AB) &= V(ABe_1, \dots, ABe_n) \\ &= \det A \cdot V(Be_1, \dots, Be_n) \\ &= \det A \cdot \det B, \end{aligned}$$

falls $\det A \neq 0$. Im Fall $\det A = 0$ kann man zeigen, dass auch $\det(AB) = 0$ gilt.

Satz 7.1 (Substitutionsregel) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, injektiv und $\det Dg(t) > 0$ auf G oder $\det Dg(t) < 0$ auf G . Ferner sei T eine kompakte, Jordan-messbare Teilmenge von G und $f : g(T) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\boxed{\int_{g(T)} f(x) dx = \int_T f(g(t)) |\det Dg(t)| dt .}$$

Formal folgt aus $x = g(t)$ also $dx = |\det Dg(t)| dt$.

Beweis Nach Satz 6.12 ist $g(T)$ Jordan-messbar. Da $g \in C^1(G)$ und folglich die Abbildung $f(g(t)) |\det Dg(t)|$ stetig in t ist, sind beide Riemann-Integrale wohldefiniert.

In drei Schritten wird nun gezeigt, dass es ausreicht, die Substitutionsregel für eine wesentlich einfachere Situation zu beweisen.

1. Behauptung Es reicht, die Substitutionsregel für kompakte Rechtecke $S \subset T$ zu beweisen.

Beweis Die Substitutionsregel gelte für jedes kompakte Rechteck $S \subset T$. Da T in der offenen Menge G kompakt ist, ist $d_0 := \text{dist}(T, G^c) > 0$. Dann ist

$$G_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, T) < \frac{d_0}{2} \right\}$$

offen und $\overline{G_0}$ eine kompakte Teilmenge von G . Folglich ist

$$L := \max_{t \in \overline{G_0}} \|Dg(t)\| < \infty .$$

Da ∂T kompakt ist, gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ kompakte Würfel C_i , $1 \leq i \leq N$, gleicher Kantenlänge $\delta < d_0/2$ mit

$$\partial T \subset \bigcup_{i=1}^N C_i, \quad \sum_{i=1}^N |C_i| < \frac{\varepsilon}{3^n} .$$

Wir betrachten jetzt eine Partition des \mathbb{R}^n aus Würfeln S der Kantenlänge δ und definieren

$$P = \{S : S \cap T \neq \emptyset\}$$

sowie

$$P_0 = \{S \in P : S \cap \partial T = \emptyset\}, \quad P_1 = \{S \in P : S \cap \partial T \neq \emptyset\}$$

als weitere Unterteilung von P .

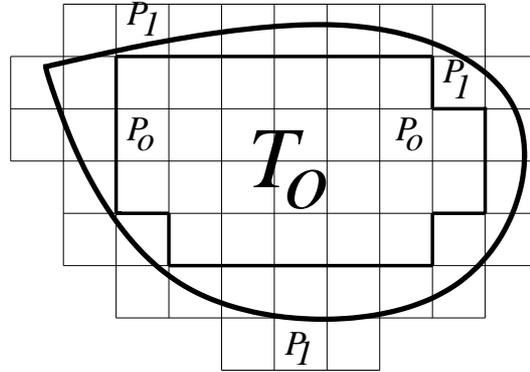


Abb. 7.3 Die Partition P

In den folgenden Beweisschritten wird auf

$$T_0 = \bigcup_{S \in P_0} S$$

die Substitutionsregel benutzt, während die Integrale über $S \in P_1$ durch ε abgeschätzt werden.

Ist $S \in P_1$, gibt es wegen $S \cap \partial T \neq \emptyset$ und $\partial T \subset \bigcup_{i=1}^N C_i$ mindestens ein $i \in \{1, \dots, N\}$ mit $S \cap C_i \neq \emptyset$. Für dieses i gilt dann

$$\sum_{S \in P_1, S \cap C_i \neq \emptyset} |S| \leq (3\delta)^n = 3^n |C_i|.$$

Deshalb ist

$$\sum_{S \in P_1} |S| \leq 3^n \sum_{i=1}^N |C_i| < \varepsilon$$

und wegen $T \setminus T_0 \subset \bigcup_{S \in P_1} S$ auch

$$|T \setminus T_0| < \varepsilon.$$

Da $S \in P$ sogar in $\overline{G_0}$ liegt, ist g auf S Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L . Also folgt wie im Beweis von Lemma 6.10 für jedes $S \in P$ die Abschätzung

$$|g(S)| \leq (2L)^n |S|.$$

Die Injektivität von g impliziert ferner

$$g(T) \setminus g(T_0) = g(T \setminus T_0) \subset g\left(\bigcup_{S \in P_1} S\right) = \bigcup_{S \in P_1} g(S).$$

Damit erhält man die Ungleichungskette

$$|g(T) \setminus g(T_0)| \leq \sum_{S \in P_1} |g(S)| \leq (2L)^n \sum_{S \in P_1} |S| \leq (2L)^n \varepsilon.$$

Zur Abkürzung benutzen wir jetzt die Größen

$$\varphi(t) = f(g(t)) |\det Dg(t)|, \quad M = \max(\|\varphi\|_{\infty, T}, \|f\|_{\infty, g(T)}).$$

Da sowohl die Rechtecke $S \in P_0$ als auch ihre Bilder $g(S)$ sich nicht überlappen (denn $g(S) \cap g(S') = g(S \cap S') \subset g(\partial S \cap \partial S') \subset \partial g(S) \cap \partial g(S')$), folgt nach Voraussetzung und mit Korollar 6.7

$$\int_{g(T_0)} f(x) dx = \int_{T_0} \varphi(t) dt.$$

Außerdem gelten nach obigen Vorbereitungen die Abschätzungen

$$\left| \int_{T \setminus T_0} \varphi(t) dt \right| \leq M |T \setminus T_0| < M\varepsilon$$

und

$$\left| \int_{g(T) \setminus g(T_0)} f(x) dx \right| \leq M |g(T) \setminus g(T_0)| \leq M(2L)^n \varepsilon.$$

Zusammenfassend erhält man

$$\begin{aligned} & \left| \int_{g(T)} f(x) dx - \int_T \varphi(t) dt \right| \\ & \leq \left| \int_{g(T) \setminus g(T_0)} f(x) dx \right| + \left| \int_{T \setminus T_0} \varphi(t) dt \right| \\ & \leq M(1 + (2L)^n) \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden konnte, folgt $\int_{g(T)} f dx = \int_T \varphi dt$; die 1. Behauptung ist also bewiesen. (\square)

Die nächsten Schritte sind Teil einer vollständigen Induktion über die Dimension n . Dabei ist der Induktionsanfang $n = 1$ die bekannte Substitutionsregel aus Analysis I. Um die Induktionsvoraussetzung, also die Gültigkeit der Substitutionsregel im \mathbb{R}^{n-1} , anwenden zu können, benötigen wir eine lokale Faktorisierung von g in einfachere Funktionen.

Lemma 7.2 (Faktorisierungslemma) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $n \geq 2$, und $g : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Funktion mit $\det Dg(t) \neq 0$ für alle $t \in G$. Dann gibt es zu jedem Punkt

$t_0 \in G$ eine offene Umgebung $U \subset G$ von t_0 und injektive C^1 -Funktionen h, ψ mit den folgenden Eigenschaften:

$$g = h \circ \psi,$$

$\psi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ist offen, und bei geeigneter Nummerierung der Indices gilt für $t = (t_1, \dots, t_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_{n-1}(t) \\ t_n \end{pmatrix}, \quad h(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ h_n(y) \end{pmatrix}.$$

Wir stellen den Beweis dieses Lemmas zurück und behandeln zuerst Abbildungen vom Typ h .

2. Behauptung Die Substitutionsregel gilt für injektive C^1 -Abbildungen h der Gestalt $h(y) = (y_1, \dots, y_{n-1}, h_n(y))^T$ mit $\det Dh(y) \neq 0$.

Beweis Nach der 1. Behauptung reicht es, die Behauptung nur für Rechtecke $R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ zu zeigen.

Aufgrund der Gestalt von h gilt

$$Dh(y) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ \partial_1 h_n(y) & \cdots & \partial_{n-1} h_n(y) & \partial_n h_n(y) \end{pmatrix},$$

so dass der Laplace'sche Entwicklungssatz (Entwicklung nach der n -ten Spalte)

$$\partial_n h_n(y) = \det Dh(y) \neq 0 \quad \text{für alle } y \in R$$

liefert. Wir nehmen o.E. $\partial_n h_n(y) > 0$ auf R an, so dass für jedes feste $y' = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in R' := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{n-1}, b_{n-1}]$ die Abbildung

$$h_n(y', \cdot) : [a_n, b_n] \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_n \mapsto h_n(y', y_n),$$

streng monoton wachsend ist. Insbesondere ist

$$h(R) = \{(y', y_n) : y' \in R', h_n(y', a_n) \leq y_n \leq h_n(y', b_n)\}$$

ein Normalbereich, vgl. §6. Der Satz von Fubini und eine triviale Verallgemeinerung von Satz 6.14 auf den \mathbb{R}^n implizieren dann für eine stetige Funktion f die

Gleichungskette

$$\begin{aligned}
 & \int_R f(h(y)) |\det Dh(y)| dy \\
 &= \int_R f(h(y)) \partial_n h_n(y) dy \\
 &= \int_{R'} \left(\int_{a_n}^{b_n} f(y', h_n(y)) \partial_n h_n(y', y_n) dy_n \right) dy' \\
 &= \int_{R'} \left(\int_{h_n(y', a_n)}^{h_n(y', b_n)} f(y', s) ds \right) dy' \\
 &= \int_{h(R)} f(x) dx .
 \end{aligned}$$

(□)

3. Behauptung Die Substitutionsregel gelte im \mathbb{R}^{n-1} . Dann gilt sie auch im \mathbb{R}^n .

Beweis Nach der 1. Behauptung reicht es, die Substitutionsregel für Rechtecke $R \subset \mathbb{R}^n$ zu beweisen. Aufgrund von Lemma 7.2 gibt es zu jedem $t \in R$ eine offene, rechteckige Umgebung U_t von t , so dass $g|_{U_t}$ geeignet faktorisiert werden kann. Da R kompakt ist, wird R bereits durch endlich viele offene Mengen U_{t_j} , $1 \leq j \in N$, überdeckt. Nach einer weiteren Unterteilung von R lässt sich R sogar in der Form

$$R = \bigcup_{i=1}^M R_i$$

mit kompakten, sich nicht überlappenden Rechtecken R_i schreiben, wobei jedes R_i in einem der U_{t_j} liegt. Da g auf U_{t_j} faktorisiert werden kann, reicht es jetzt, den Fall $g = h \circ \psi$ auf einem kompakten Rechteck R mit $R \subset U$, U ein offenes Rechteckgebiet, zu betrachten. Dabei gestattet die 2. Behauptung bereits die Umformung

$$\int_{g(R)} f(x) dx = \int_{h(\psi(R))} f(x) dx = \int_{\psi(R)} F(y) dy$$

mit

$$F(y) = f(h(y)) |\det Dh(y)| .$$

Wir schreiben nun $R = R' \times R_n$ mit $R' \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $R_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$, und entsprechend $t = (t', t_n)$, $y = (y', y_n)$. Ferner definieren wir aufgrund der speziellen Gestalt von $\psi(t)$ für festes $t_n \in R_n$ die Funktion $\gamma_{t_n} : R' \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ durch

$$\gamma_{t_n}(t') = (g_1(t', t_n), \dots, g_{n-1}(t', t_n))^T$$

und versuchen, die Substitutionsregel auf $\gamma_{t_n}(\cdot)$ anzuwenden.

Wegen $R = R' \times R_n \subset U =: U' \times U_n$ ist $\gamma_{t_n}(\cdot)$ für jedes feste $t_n \in R_n$ eine C^1 -Abbildung auf $U' \subset \mathbb{R}^{n-1}$.

Die Funktionaldeterminante $\det D\gamma_{t_n}(\cdot)$ wird wie folgt berechnet: Aus $g = h \circ \psi$ folgt aus der Produktregel $Dg(t) = Dh(y) \cdot D\psi(t)$ mit $y = \psi(t)$ und aus dem Produktsatz für Determinanten

$$\det Dg(t) = \det Dh(y) \cdot \det D\psi(t).$$

Mit $\det Dg(t) \neq 0$ ist auch $\det D\psi(t) \neq 0$ für alle $t \in U$; genauer folgt mit dem Laplace'schen Entwicklungssatz aus

$$D\psi(t) = \left(\begin{array}{ccc|c} \partial_1 g_1 & \cdots & \partial_{n-1} g_1 & \partial_n g_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \partial_1 g_{n-1} & \cdots & \partial_{n-1} g_{n-1} & \partial_n g_{n-1} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & * \\ & & & \vdots \\ & & & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

die Formel

$$\det D\gamma_{t_n}(t') = \det D\psi(t).$$

Insbesondere ist $\det D\gamma_{t_n}(t') \neq 0$ auf U' . Auf dem Rechteckgebiet U' gilt dann sogar $\det D\gamma_{t_n}(t') > 0$ in jedem $t' \in U'$ (oder < 0 für alle $t' \in U'$). Da ψ auf U injektiv ist, muss auch $\gamma_{t_n}(\cdot)$ auf U' injektiv sein: Wir folgern, dass γ_{t_n} die Voraussetzungen des Satzes 7.1 auf $U' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ erfüllt und die Induktionsvoraussetzung angewandt werden darf.

Mit $y = \psi(t) = (\gamma_{t_n}(t'), t_n)$, $t' \in R'$, $t_n \in R_n$, liefern eine zweimalige Anwendung des Satzes von Fubini und die Induktionsvoraussetzung nun die folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned} & \int_{\psi(R)} F(y) dy \\ &= \int_{R_n} \left(\int_{\gamma_{t_n}(R')} F(y', t_n) dy' \right) dt_n \\ &= \int_{R_n} \left(\int_{R'} F(\gamma_{t_n}(t'), t_n) |\det D\gamma_{t_n}(t')| dt' \right) dt_n \\ &= \int_R F(\psi(t)) |\det D\psi(t)| dt. \end{aligned}$$

Da $f(h \circ \psi(t)) = f(g(t))$ und

$$|\det Dh(\psi(t))| |\det D\psi(t)| = |\det Dg(t)|$$

gilt, ist die Aussage

$$\int_{g(R)} f(x) dx = \int_R f(g(t)) |\det Dg(t)| dt$$

bewiesen und somit der Induktionsschritt von $n - 1$ auf n durchgeführt. (\square)

Zum Abschluss wenden wir uns dem *Beweis von Lemma 7.2* zu. Im Punkt $t_0 \in G$ entwickeln wir die Funktionaldeterminante von g nach der n -ten Zeile und erhalten

$$0 \neq \det Dg(t_0) = \det \begin{pmatrix} \partial_1 g_1 & \cdots & \partial_n g_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 g_n & \cdots & \partial_n g_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \partial_k g_n(t_0) G_k(t_0)$$

mit Unterdeterminanten $G_k(t_0)$. In der obigen Summe muss mindestens ein $G_k(t_0) \neq 0$ sein; o.E. sei

$$0 \neq G_n(t_0) = \det \begin{pmatrix} \partial_1 g_1 & \cdots & \partial_{n-1} g_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 g_{n-1} & \cdots & \partial_{n-1} g_{n-1} \end{pmatrix} (t_0).$$

Ferner gibt es nach dem Satz über Umkehrfunktionen eine offene Umgebung \tilde{U} von t_0 , auf der g injektiv ist.

Wie in der Aussage von Lemma 7.2 wird jetzt

$$\psi(t) = (g_1(t), \dots, g_{n-1}(t), t_n)^T$$

definiert. Im Beweis der 3. Behauptung hatten wir bereits gesehen, dass damit

$$\det D\psi(t_0) = G_n(t_0) \neq 0$$

folgt. Nach dem Satz über Umkehrfunktionen gibt es dann eine offene Umgebung $U \subset \tilde{U}$ von t_0 , so dass $\psi|_U$ eine Bijektion von U auf eine offene Umgebung V von $\psi(t_0)$ ist; ihre Umkehrfunktion $\varphi = (\psi|_U)^{-1} : V \rightarrow U$ ist eine C^1 -Funktion. Jetzt definieren wir auf V die C^1 -Funktion

$$h(y) := (y_1, \dots, y_{n-1}, g_n(\varphi_1(y), \dots, \varphi_{n-1}(y), y_n))^T.$$

Nach Konstruktion gilt für $t \in U$

$$h(\psi(t)) = (g_1, \dots, g_{n-1}, g_n(\varphi_1 \circ \psi, \dots, \varphi_{n-1} \circ \psi, t_n))(t) = g(t);$$

außerdem ist h injektiv auf $V = \psi(U)$, da ψ und g injektiv sind. Die Funktionen h und ψ bilden also die gewünschte Faktorisierung von g auf U . (\square)

Jetzt ist Satz 7.1 vollständig bewiesen. \square

Anwendungen der Substitutionsregel

Beispiel 7.3 (Polarkoordinaten im \mathbb{R}^2)

1. Für die Transformation von x auf Polarkoordinaten

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = g(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

ist

$$Dg(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und folglich

$$\det Dg(r, \varphi) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r .$$

Sei

$$G = \{(r, \varphi) : r > 0, 0 < \varphi < 2\pi\}$$

und $T \subset G$ eine kompakte, Jordan-messbare Teilmenge. Dann gilt für jede stetige Funktion $f : B := g(T) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_B f(x) dx = \int_T f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi) .$$

Häufig hat T die Gestalt $T = [r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$, so dass der Satz von Fubini

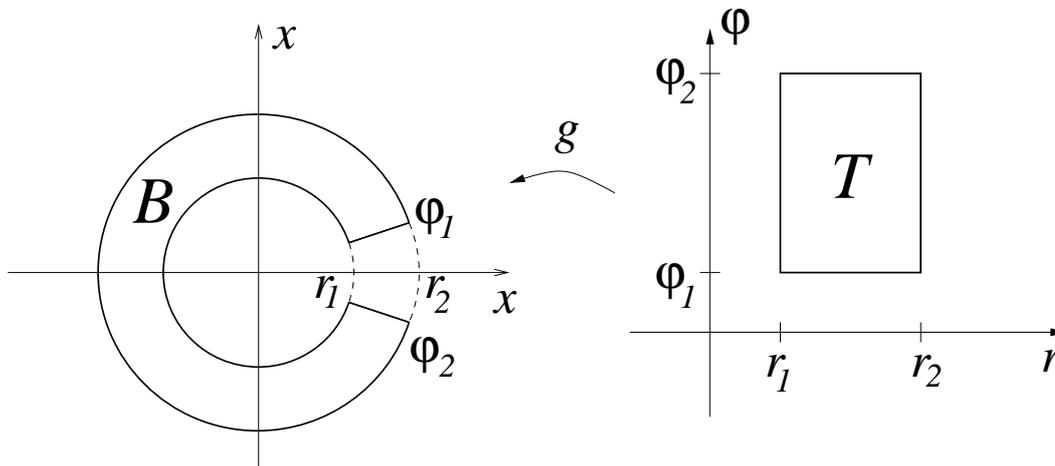


Abb. 7.4 Transformation auf Polarkoordinaten

das Ergebnis

$$\int_B f(x) dx = \int_{r_1}^{r_2} r \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi \right) dr$$

liefert. Ist f sogar radialsymmetrisch, d.h. $f(x) = \tilde{f}(r)$ mit einer stetigen Funktion \tilde{f} , ist das innere Integral trivial auszuwerten, und man erhält

$$\int_B f(x) dx = (\varphi_2 - \varphi_1) \int_{r_1}^{r_2} r \tilde{f}(r) dr .$$

2. Nun ist T häufig eine kompakte Teilmenge des Streifens $\{(r, \varphi) : r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, auf dem g wegen $g(r, 0) = g(r, 2\pi)$ nicht injektiv ist; außerdem ist $\det Dg = 0$ für $r = 0$. Da in dieser Situation Satz 7.1 nicht direkt angewandt werden kann, ist ein weiterer Grenzübergang notwendig.

Es sei $f \in C^0(\overline{B_R(0)})$, also $T = [0, R] \times [0, 2\pi]$. Mit $T_\varepsilon = [\varepsilon, R] \times [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ für $\varepsilon > 0$ gilt dann

$$\int_{g(T_\varepsilon)} f(x) dx = \int_{T_\varepsilon} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi) .$$

Da $|T \setminus T_\varepsilon| \leq 2(\pi + R)\varepsilon$ und auch $|g(T) \setminus g(T_\varepsilon)| \rightarrow 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ gilt, folgt für $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{g(T)} f(x) dx = \int_T f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi) .$$

3. Falls f nicht beschränkt und folglich nicht Riemann-integrierbar ist, wird $\int_B f(x) dx$ als uneigentliches Integral interpretiert.

Wir betrachten z.B.

$$f(x) = |x|^{-\alpha} \text{ auf } B = \overline{B_1(0)} \setminus \{0\}$$

und setzen $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon \leq |x| \leq 1\}$. Dann sei *per definitionem*

$$\int_B f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_\varepsilon} f(x) dx ,$$

falls obiger Grenzwert existiert. Mit (1), (2) folgt

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} |x|^{-\alpha} dx &= \int_\varepsilon^1 \left(\int_0^{2\pi} 1 d\varphi \right) r^{-\alpha} r dr \\ &= \frac{2\pi}{2-\alpha} r^{2-\alpha} \Big|_\varepsilon^1 \longrightarrow \frac{2\pi}{2-\alpha} \end{aligned}$$

für $\varepsilon \rightarrow 0+$, falls $\alpha < 2$ ist. Man erhält also

$$\int_B |x|^{-\alpha} dx = \begin{cases} \frac{2\pi}{2-\alpha} & , \alpha < 2 \\ \infty & , \alpha \geq 2 . \end{cases}$$

Es fällt auf, dass unbeschränkte Funktionen wie $|x|^{-\alpha}$ (für $1 \leq \alpha < 2$) in einer Umgebung des Nullpunktes im \mathbb{R}^2 integrierbar sind, während sie im \mathbb{R}^1 nicht uneigentlich Riemann-integrierbar sind!

4. Auch falls B unbeschränkt und folglich nicht Jordan-messbar ist, kann $\int_B f(x) dx$ ggf. als uneigentliches Riemann-Integral interpretiert werden.

Wir betrachten das Integral $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2} dx$ und führen die Mengen $B_R = \overline{B_R(0)}$ und $Q_R = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty \leq R\}$ zur Approximation ein. Mit (1), (2) folgt

$$\int_{B_R} e^{-|x|^2} dx = \int_0^R 2\pi r e^{-r^2} dr = -\pi e^{-r^2} \Big|_0^R \longrightarrow \pi \quad \text{für } R \rightarrow \infty ,$$

so dass im Sinne eines uneigentlichen Riemann-Integrals

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2} dx = \pi$$

ist. Andererseits gilt wegen $Q_{R/\sqrt{2}} \subset B_R \subset Q_R$ die Abschätzung

$$\int_{Q_{R/\sqrt{2}}} e^{-|x|^2} dx \leq \int_{B_R} e^{-|x|^2} dx \leq \int_{Q_R} e^{-|x|^2} dx .$$

Damit liefert der Satz von Fubini die Gleichungskette

$$\begin{aligned} \pi &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{Q_R} e^{-|x|^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \left(\int_{-R}^R e^{-x_1^2 - x_2^2} dx_2 \right) dx_1 \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{-R}^R e^{-s^2} ds \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds \right)^2 . \end{aligned}$$

Also erhält man die in der Statistik (Normalverteilung) und in der Theorie partieller Differentialgleichungen (Wärmeleitungsgleichung) wichtige Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi} \quad \text{Gaußsches Fehlerintegral .}$$

Beispiel 7.4 (*Zylinderkoordinaten im \mathbb{R}^3*) Bei achsensymmetrischen Problemen werden häufig Zylinderkoordinaten

$$x_1 = r \cos \varphi , \quad x_2 = r \sin \varphi , \quad x_3 = z$$

benutzt. Für $x = g(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)^T$ berechnet man

$$\det Dg = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r > 0.$$

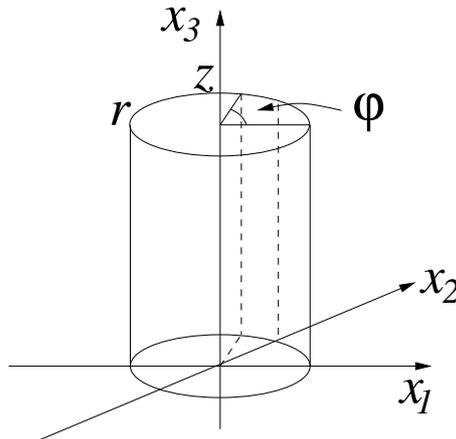


Abb. 7.5 Zylinderkoordinaten

Ist T eine kompakte Teilmenge des Gebietes

$$\{(r, \varphi, z) : r > 0, 0 < \varphi < 2\pi, z \in \mathbb{R}\}$$

und $B = g(T)$, erhält man für $f \in C^0(B)$

$$\int_B f(x) dx = \int_T f(\cos \varphi, r \sin \varphi, z) r d(r, \varphi, z).$$

Falls T ein Quader vom Typ $[r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2] \times [z_1, z_2]$ mit $0 < r_1 < r_2$, $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi$ ($r_1 = 0$ und $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$ sind im Sinne eines uneigentlichen Riemann-Integrals ebenfalls erlaubt) ist, liefert der Satz von Fubini die Formel

$$\int_B f(x) dx = \int_{z_1}^{z_2} \left(\int_{r_1}^{r_2} \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) d\varphi \right) r dr \right) dz.$$

Beispiel 7.5 (*Kugelkoordinaten im \mathbb{R}^3*) Jeder Punkt $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ mit $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0$ besitzt eine Darstellung der Form

$$x_1 = r \cos \vartheta \cos \varphi, \quad x_2 = r \cos \vartheta \sin \varphi, \quad x_3 = r \sin \vartheta$$

mit $r > 0$, $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Für die Transformation

$$g(r, \vartheta, \varphi) = (r \cos \vartheta \cos \varphi, r \cos \vartheta \sin \varphi, r \sin \vartheta)^T$$

findet man die Funktionaldeterminante

$$\det Dg(r, \vartheta, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \cos \varphi & -r \cos \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -r^2 \cos \vartheta < 0$$

(bzw. $= 0$, falls $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$).

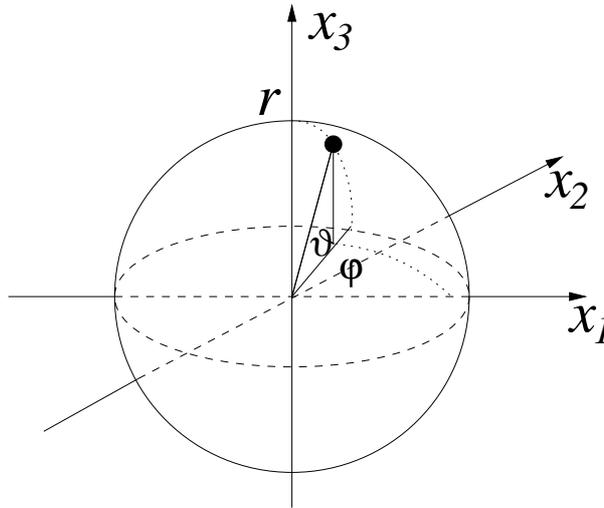


Abb. 7.6 Kugelkoordinaten

Sei T eine kompakte Teilmenge von $\{(r, \vartheta, \varphi) : r > 0, |\vartheta| < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < 2\pi\}$ und $B = g(T)$. Dann liefert die Substitutionsregel für $f \in C^0(B)$ die Formel

$$\int_B f(x) dx = \int_T f(r \cos \vartheta \cos \varphi, r \cos \vartheta \sin \varphi, r \sin \vartheta) r^2 \cos \vartheta d(r, \vartheta, \varphi).$$

Wieder bleibt die Formel im Grenzfall $r \geq 0, |\vartheta| \leq \frac{\pi}{2}$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ erhalten. Ist $T = [r_1, r_2] \times [\vartheta_1, \vartheta_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$ mit $0 \leq r_1 < r_2, -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta_1 < \vartheta_2 \leq \frac{\pi}{2}$ und $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi$, erlaubt der Satz von Fubini eine iterierte Auswertung des Integrals über T .

Es ist auch möglich, Polarkoordinaten in der Form

$$x_1 = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \vartheta$$

einzuführen, wobei jetzt der Winkel $\vartheta \in (0, \pi)$ zwischen x und der e_3 -Achse gemessen wird. In diesem Fall berechnet man für die entsprechende Transformation g die Funktionaldeterminante $\det Dg(r, \vartheta, \varphi) = r^2 \sin \vartheta \geq 0$.

Damit erhält man für das Volumen der Kugel $B_R(0)$

$$\begin{aligned} |B_R(0)| &= \int_0^R r^2 \left(\int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) dr \\ &= 2 \cdot 2\pi \int_0^R r^2 \, dr = \frac{4\pi}{3} R^3 . \end{aligned}$$

Beispiel 7.6 (*Polarkoordinaten im \mathbb{R}^n*) In diesem Fall benötigt man neben $r > 0$ noch $n - 1$ Winkel

$$0 < \theta_1, \dots, \theta_{n-2} < \pi, \quad 0 < \theta_{n-1} < 2\pi,$$

um $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ in der Form

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta_1 \\ x_2 &= r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ x_3 &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdot \dots \cdot \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \\ x_n &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdot \dots \cdot \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1} \end{aligned}$$

darzustellen. Die zugehörige Funktionaldeterminante ist

$$Dg(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \cdot \sin^{n-3} \theta_2 \cdot \dots \cdot \sin \theta_{n-2} .$$

8 Integralsätze im \mathbb{R}^2

Das Ziel der Abschnitte 8 und 9 ist die Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

und der partiellen Integration

$$\int_a^b u'v dx = - \int_a^b uv' dx + uv \Big|_a^b$$

auf mehrdimensionale Integrale. Es stellt sich die Frage, durch welche Differentialoperatoren dabei $\frac{d}{dx}$ und wodurch die Randterme $uv \Big|_a^b$ ersetzt werden.

Definition

- (1) Eine Abbildung $F : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt ein *Vektorfeld*
- (2) Ist $B \subset \mathbb{R}^3$ offen und $F : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein C^1 -Vektorfeld, so heißt das Vektorfeld

$$\text{rot } F : B \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{rot } F(x) = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix} (x)$$

die *Rotation* von F .

- (3) Ist $B \subset \mathbb{R}^2$ offen und $F : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein C^1 -Vektorfeld, so definiert man (die skalarwertige Rotation)

$$\text{rot } F(x) = \partial_1 F_2(x) - \partial_2 F_1(x).$$

Man beachte, dass man in diesem Fall $\text{rot } F$ als die dritte Komponente von $\text{rot } \tilde{F}$ des $3D$ -Vektorfeldes

$$\tilde{F}(x_1, x_2, x_3) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2), 0)^T$$

erhält.

Beispiele

- (1) Vektorfelder treten z.B. als Geschwindigkeitsfelder in der Strömungsmechanik, als Verzerrungsvektoren elastischer Körper, als Kraftfelder im Elektromagnetismus und als Gravitationsfelder auf.

(2) Für

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 \\ \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3 \\ \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1 \end{pmatrix}$$

erhält man $\operatorname{rot} F \equiv \omega$. Das Geschwindigkeitsfeld F beschreibt eine *Starrkörperrotation* um die Achse $\omega \in \mathbb{R}^3$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{1}{2}|\omega|$, $|\cdot| = \|\cdot\|_2$.

(3) Ist $F(x) = \nabla\varphi(x)$ mit einem skalaren C^2 -Potential $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, gilt $\operatorname{rot} F(x) \equiv 0$, d.h.,

Gradientenfelder sind wirbelfrei, kurz: $\operatorname{rot} \operatorname{grad} = 0$.

(4) Für $F(x, y) = \frac{\omega}{2}(-y, x)^T$, $\omega \in \mathbb{R}$, einem zweidimensionalen Wirbel um den Nullpunkt mit Winkelgeschwindigkeit $\frac{\omega}{2}$, gilt $\operatorname{rot} F = \omega$. Auf jedem Kreis $B_r(0)$, $r > 0$, gilt bei positiver Orientierung von $\partial B_r(0)$

$$\int_{B_r(0)} \operatorname{rot} F \, dx = \omega \pi r^2 = \int_{\partial B_r(0)} F \cdot dx .$$

Man zeigt sogar für jedes kompakte Rechteck $R \subset \mathbb{R}^2$

$$\int_R \operatorname{rot} F \, dx = \int_{\partial R} F \cdot dx .$$

Definition Eine Funktion $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine *Funktion von beschränkter Variation* (kurz: *BV-Funktion*), $\varphi \in BV[a, b]$, falls es eine Konstante $M \geq 0$ gibt mit

$$\sum_{k=1}^n |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| \leq M$$

für jede Zerlegung $Z : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. In diesem Fall heißt

$$V(\varphi) = \sup_Z \sum_{k=1}^n |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})|$$

die *Totalvariation* von φ über $[a, b]$.

Bemerkung Es gilt $C^1[a, b] \subset BV[a, b]$, aber

$$C[a, b] \not\subset BV[a, b] \not\subset C[a, b] .$$

Die Funktion $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann von beschränkter Variation, wenn die Kurve $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$ rektifizierbar ist; dabei wird die definitionsgemäß geforderte Stetigkeit der Kurve außer Acht gelassen.

Definition Eine Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt *BV-Normalbereich*, falls es stetige Funktionen $\varphi_1 \leq \varphi_2 \in BV[a, b]$ und $\psi_1 \leq \psi_2 \in BV[c, d]$ gibt mit

$$\begin{aligned} B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\} . \end{aligned}$$

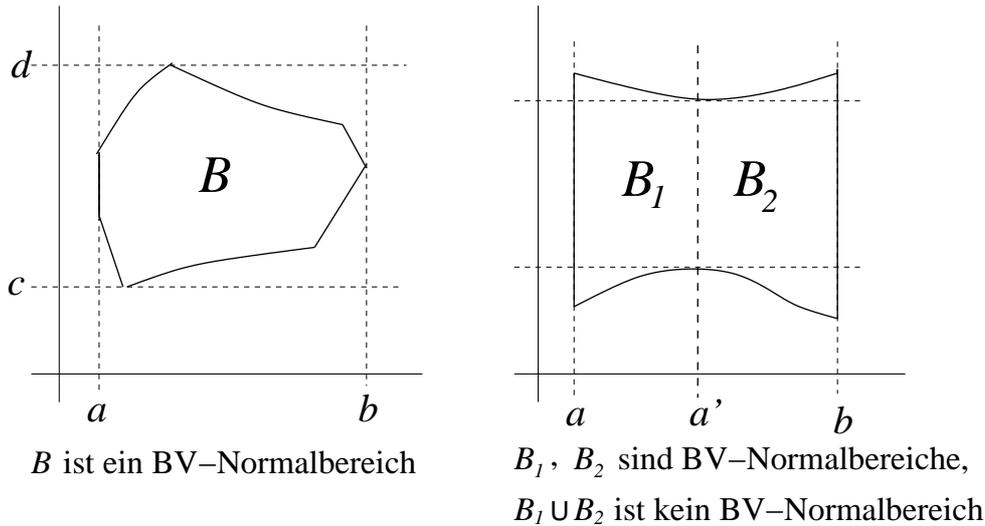


Abb. 8.1 Normalbereiche

Hauptsatz 8.1 (*Greenscher Satz*) Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich und $\gamma = \partial B$ der positiv orientierte Rand von B , d.h., die geschlossene Kurve γ wird im mathematisch positiven Sinn durchlaufen. Ist F ein C^1 -Vektorfeld auf einer offenen Menge $G \supset B$, so gilt

$$\boxed{\int_B \operatorname{rot} F(x) \, dx = \int_\gamma F(x) \cdot dx .}$$

Beweis Im ersten Schritt sei $F(x) = \begin{pmatrix} P(x) \\ 0 \end{pmatrix}$ und folglich $\operatorname{rot} F(x) = -\partial_2 P(x)$. Da B ein BV-Normalbereich (bzgl. der x -Achse) ist, schreiben wir $\gamma = \partial B$ in der Form $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ mit den folgenden rektifizierbaren Kurven:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} t \\ \varphi_1(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b]; & \gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} b \\ \varphi_1(b) + t(\varphi_2(b) - \varphi_1(b)) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]; \\ \gamma_3^-(t) &= \begin{pmatrix} t \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b]; & \gamma_4^-(t) &= \begin{pmatrix} a \\ \varphi_1(a) + t(\varphi_2(a) - \varphi_1(a)) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Dabei bedeutet γ_3^-, γ_4^- , dass die Kurven γ_3, γ_4 umgekehrt orientiert zu γ_1, γ_2 durchlaufen werden, s. Abb. 8.2

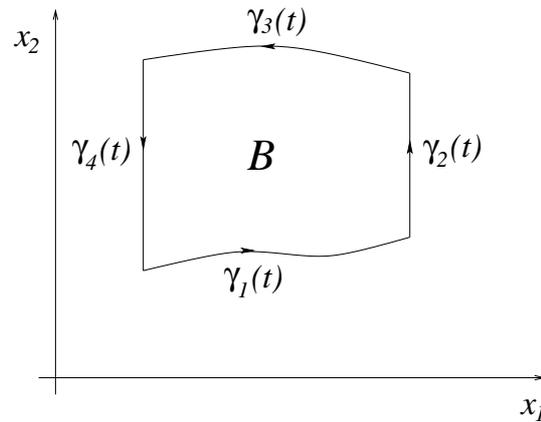


Abb. 8.2 Der Normalbereich B

Jetzt liefern Satz 6.14 und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned} \int_B -\partial_2 P(x) dx &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x_1)}^{\varphi_2(x_1)} -\partial_2 P(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_a^b (P(x_1, \varphi_1(x_1)) - P(x_1, \varphi_2(x_1))) dx_1 . \end{aligned}$$

Für den 1. Anteil auf der rechten Seite gilt

$$\int_a^b P(t, \varphi_1(t)) dt = \int_{\gamma_1} \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dx ,$$

denn für jede Zerlegung $Z : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ ist die Riemannsche Summe

$$\sum_k \begin{pmatrix} P(t_k, \varphi_1(t_k)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_k - t_{k-1} \\ \varphi_1(t_k) - \varphi_1(t_{k-1}) \end{pmatrix}$$

zur Approximation von $\int_{\gamma_1} (P, 0)^T \cdot dx$ auch eine Riemannsche Summe von $\int_a^b P(t, \varphi_1(t)) dt$. Ebenso zeigt man

$$- \int_a^b P(t, \varphi_2(t)) dt = \int_{\gamma_3} (P, 0)^T \cdot dx .$$

Da außerdem $\int_{\gamma_2} (P, 0)^T \cdot dx$ und $\int_{\gamma_4} (P, 0)^T \cdot dx$ verschwinden, folgt für $F = (P, 0)^T$

$$\int_B \operatorname{rot} F dx = \int_{\gamma} F \cdot dx .$$

Analog zeigt man für Vektorfelder vom Typ $F(x) = (0, Q(x))^T$ die gleiche Identität, indem man ausnutzt, dass B ein BV -Normalbereich bzgl. der y -Achse

ist. Damit ist der Satz bewiesen. ■

Bemerkungen

- (1) Die anschauliche Bedeutung des Greenschen Satzes erschließt sich, wenn man sich den Normalbereich B als Vereinigung $B = \bigcup_i Q_i$ von sehr vielen kleinen sich nicht überlappenden Quadraten Q_i denkt. Ersetzt man $F(x)$ auf Q_i durch seine lineare Näherung $F(x) = F_i + a_i x + b_i x^\perp$ mit Konstanten $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ und $x^\perp = (-x_2, x_1)^T$, folgt

$$\int_{Q_i} \operatorname{rot} F \, dx = \int_{Q_i} 2b_i \, dx = \int_{\partial Q_i} F \cdot dx ,$$

denn $F_i + a_i x = \nabla(F_i \cdot x + \frac{a_i}{2}|x|^2)$ besitzt ein Potential; folglich gilt $\operatorname{rot}(F_i + a_i x) = 0$ sowie $\int_{\partial Q_i} (F_i + a_i x) \cdot dx = 0$. Beim Übergang von Q_i zu einem benachbarten Quadrat Q_j heben sich die Tangentialanteile von F entlang $\partial Q_i \cap \partial Q_j$ im Integralmittel wegen der entgegengesetzten Orientierung und der Stetigkeit von F auf:

$$\int_{\partial Q_i \cap \partial Q_j} F|_{Q_i} \cdot dx + \int_{\partial Q_i \cap \partial Q_j} F|_{Q_j} \cdot dx = 0 .$$

Also gilt

$$\int_{Q_i \cup Q_j} \operatorname{rot} F \, dx \doteq \int_{\partial(Q_i \cup Q_j)} F \cdot dx$$

und schließlich sogar $\int_B \operatorname{rot} F \, dx = \int_{\partial B} F \cdot dx$, wobei das erste Integral die über B integrierte Wirbelstärke und das zweite Integral den gesamten Fluss von F entlang ∂B angibt.

- (2) Mit $F = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ wird der Greensche Satz auch in der Form

$$\int_B (\partial_x Q - \partial_y P) \, d(x, y) = \int_{\partial B} (P \, dx + Q \, dy)$$

geschrieben.

- (3) Mit $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$, also $\operatorname{rot}(P, Q)^T = 2$, erhält man für die Fläche des BV -Normalbereichs B die Formel

$$\boxed{|B| = \frac{1}{2} \int_{\partial B} (x \, dy - y \, dx) .}$$

Die Fläche $|B|$ kann also durch ein Kurvenintegral über ∂B bestimmt werden.

Korollar 8.2 Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ offen und $F : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein C^1 -Vektorfeld. Die Menge $B \subset G$ lasse sich als Vereinigung von zwei sich nicht überlappenden BV-Normalbereichen schreiben, die nur ein Randstück gemeinsam haben. Dann gilt

$$\int_B \operatorname{rot} F(x) \, dx = \int_\gamma F(x) \cdot dx ,$$

wenn $\gamma = \partial B$ den positiv orientierten Rand von B bezeichnet.

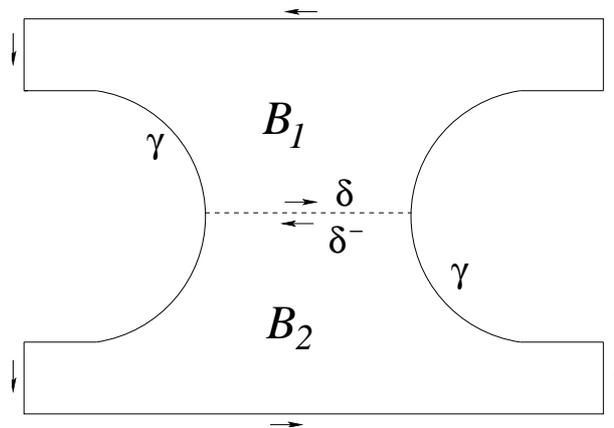


Abb. 8.3 Nicht-überlappende BV-Normalbereiche

Zusatz: Die Aussage gilt auch, falls B die Vereinigung von endlich vielen, sich nicht-überlappenden Mengen B_1, \dots, B_N ist, wobei jedes B_j ein BV-Normalbereich bzgl. eines geeigneten, u.U. gedrehten Koordinatensystems ist und B_j mit B_{j+1} für jedes $1 \leq j \leq N-1$ nur ein gemeinsames Randstück hat. Ferner sollen sich B_N und B_1 nicht schneiden.

Beweis Sei $\delta = \partial B_1 \cap \partial B_2$ das gemeinsame, rektifizierbare Randstück der Zerlegung $B = B_1 \cup B_2$ in BV-Normalbereiche B_1 und B_2 . Nach Satz 8.1 und Korollar 6.7 gilt

$$\begin{aligned} \int_B \operatorname{rot} F \, dx &= \int_{B_1} \operatorname{rot} F \, dx + \int_{B_2} \operatorname{rot} F \, dx \\ &= \int_{\partial B_1} F \cdot dx + \int_{\partial B_2} F \cdot dx . \end{aligned}$$

Da sich die Kurvenintegrale $\int_\delta F \cdot dx$ und $\int_{\delta^-} F \cdot dx$ dabei in der Summe aufheben, erhält man das gewünschte Kurvenintegral $\int_{\partial B} F \cdot dx$. ■

Definition

- (1) Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld. Dann heißt

$$\operatorname{div} F : B \rightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{div} F(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i F_i(x)$$

(kurz $\operatorname{div} F = \nabla \cdot F$) die *Divergenz* von F .

- (2) Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein BV -Normalbereich, dessen positiv orientierter Rand $\gamma = \partial B$ sich als stückweise C^1 -Parameterkurve schreiben läßt. Ist γ in t stetig differenzierbar, definiert man den (nach außen zeigenden) *äußeren Normalenvektor* $N(t) = (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))$ und, falls $\gamma'(t) \neq 0$ ist, den *äußeren Normaleneinheitsvektor*

$$n(t) = \frac{N(t)}{|N(t)|};$$

dabei ist wie üblich $|\cdot| = \|\cdot\|_2$.

Bemerkung

- (1) Die Divergenz gibt die Stärke einer Quelle oder einer Senke in einem Geschwindigkeitsfeld oder Kraftfeld an. Das Geschwindigkeitsfeld $F(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x}{|x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, beschreibt eine divergenzfreie Strömung in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, die jedoch im Nullpunkt eine Quelle der Stärke 1 besitzt. Die gleiche Aussage gilt für das Vektorfeld $F(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{x}{|x|^3}$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.
- (2) Ein Vektorfeld vom Typ $F(x) = \operatorname{rot} A(x)$ im \mathbb{R}^3 ist immer divergenzfrei, kurz:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0.$$

Das Vektorfeld $A(x)$ heißt dabei ein *Vektorpotential* von F .

Satz 8.3 (*Gaußscher Satz im \mathbb{R}^2*) Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein BV -Normalbereich mit positiv orientiertem Rand $\gamma = \partial B$, der sich stückweise als reguläre C^1 -Parameterkurve schreiben läßt. Dann gilt für ein C^1 -Vektorfeld $F : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ auf der offenen Menge $G \supset B$

$$\boxed{\int_B \operatorname{div} F(x) \, dx = \int_{\partial B} F(x) \cdot n(x) \, d\sigma(x).}$$

Dabei ist, falls γ über $[a, b]$ parametrisiert wird,

$$\int_{\partial B} F \cdot n \, d\sigma := \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot n(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \, dt.$$

Bemerkung

- (1) Der Beweis wird zeigen, dass Satz 8.3 unter ähnlichen Voraussetzungen wie Satz 8.1 oder Korollar 8.2 gilt.
- (2) Das neue “Kurvenintegral” $\int_{\gamma} F \cdot n \, d\sigma$ schreibt man gelegentlich auch in der Form $\int_{\gamma} F \cdot n \, do$ oder $\int_{\gamma} F \cdot n \, dS$ mit dem Flächen- oder Bogenlängenelement $do = d\sigma = dS = |\gamma'(t)| \, dt$.

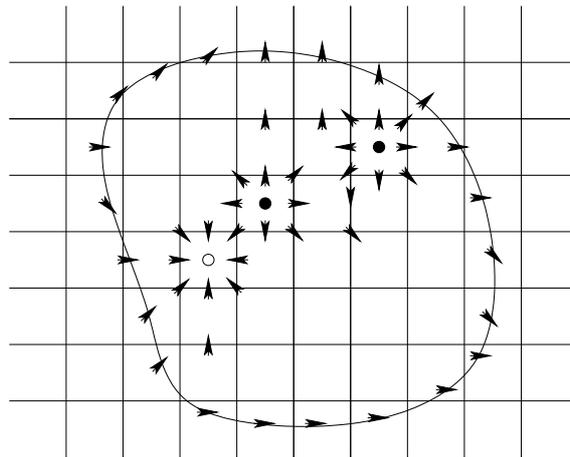


Abb. 8.1 Vektorfeld mit Quellen, Senke und Fluss am Rand

- (3) Im Gaußschen Satz misst $\int_B \operatorname{div} F \, dx$ die über B aufintegrierte Quellstärke $\operatorname{div} F$ von F , während $\int_{\partial B} F \cdot n \, d\sigma$ den Nettofluss von F durch ∂B nach außen angibt.

Beweis Für $\tilde{F}(x) = (-F_2(x), F_1(x))^T$ ist

$$\operatorname{rot} \tilde{F} = \partial_1 \tilde{F}_2 - \partial_2 \tilde{F}_1 = \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 = \operatorname{div} F.$$

Dann liefern Satz 8.1 oder Korollar 8.2

$$\begin{aligned} \int_B \operatorname{div} F \, dx &= \int_B \operatorname{rot} \tilde{F} \, dx = \int_{\gamma} \tilde{F} \cdot dx = \int_a^b \tilde{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt \\ &= \int_a^b (-F_2 \cdot \gamma'_1 + F_1 \cdot \gamma'_2) \, dt = \int_a^b F \cdot N \, dt \\ &= \int_a^b F \cdot n \, |\gamma'| \, dt = \int_{\partial B} F \cdot n \, d\sigma. \end{aligned}$$

□

9 Integralsätze im \mathbb{R}^3

Bevor der Greensche und Gaußsche Satz auf die dreidimensionale Situation verallgemeinert werden, müssen wir Flächen und Oberflächenintegrale im \mathbb{R}^3 einführen.

Definition Sei $K \neq \emptyset$ eine kompakte, Jordan-messbare Teilmenge des \mathbb{R}^2 , sei $G \supset K$ offen und $\phi : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine C^1 -Abbildung. Dann heißt

$$S = \{\phi(u) : u \in K\}$$

eine *Fläche im \mathbb{R}^3 mit Parameterdarstellung (ϕ, K) über dem Parameterbereich K* .

Hat für jeden Parameterwert $u \in G$ die Funktionalmatrix

$$D\phi(u) = \begin{pmatrix} \partial_1\phi_1 & \partial_2\phi_1 \\ \partial_1\phi_2 & \partial_2\phi_2 \\ \partial_1\phi_3 & \partial_2\phi_3 \end{pmatrix} (u)$$

den Rang 2, sind also die Spaltenvektoren von $D\phi(u)$ linear unabhängig, heißt die Parameterdarstellung *regulär* oder *nicht degeneriert* in $u \in G$.

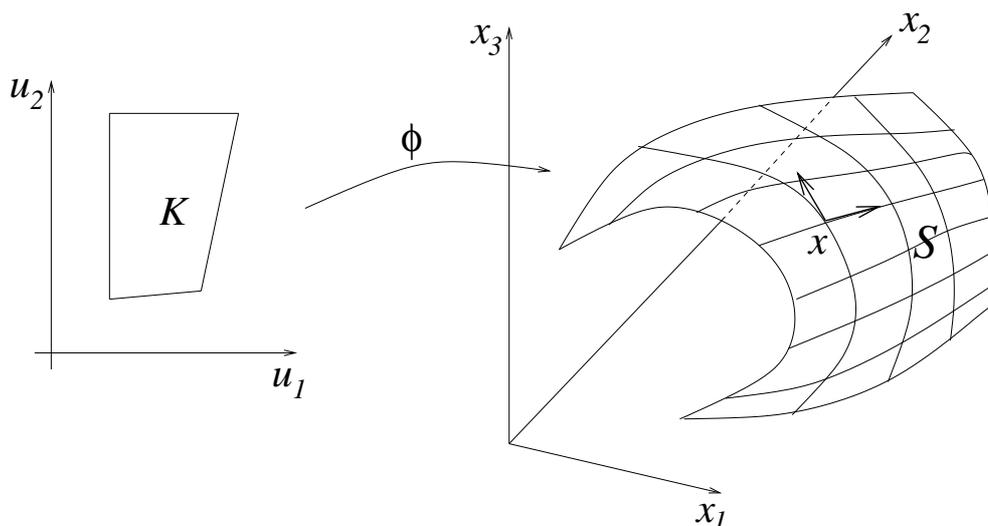


Abb. 9.1 Parameterfläche im \mathbb{R}^3

Bemerkung Die Rangbedingung an $D\phi$ stellt sicher, dass in dem Flächenpunkt $x = \phi(u)$ von S zwei linear unabhängige Tangentialvektoren, $\partial_1\phi(u)$ und $\partial_2\phi(u)$, existieren. Mit Hilfe des Vektorprodukts wird aus $\partial_1\phi$ und $\partial_2\phi$ der Normalenvektor in x definiert.

Das *Vektorprodukt*

$$\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x, y \mapsto x \wedge y = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix},$$

hat die folgenden Eigenschaften ($x, y, z \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$):

- (i) $x \wedge y = -y \wedge x, x \wedge x = 0$
- (ii) $(\lambda x) \wedge y = x \wedge (\lambda y) = \lambda(x \wedge y)$
- (iii) $x \wedge (y + z) = x \wedge y + x \wedge z, (x + y) \wedge z = x \wedge z + y \wedge z$
- (iv) $|x \wedge y| = |x||y| \sin \angle(x, y)$

Da $|y| \sin \angle(x, y)$ die Höhe in dem von den Vektoren x und y aufgespannten Parallelogramm ist, gibt $|x \wedge y|$ die Fläche dieses Parallelogramms an.

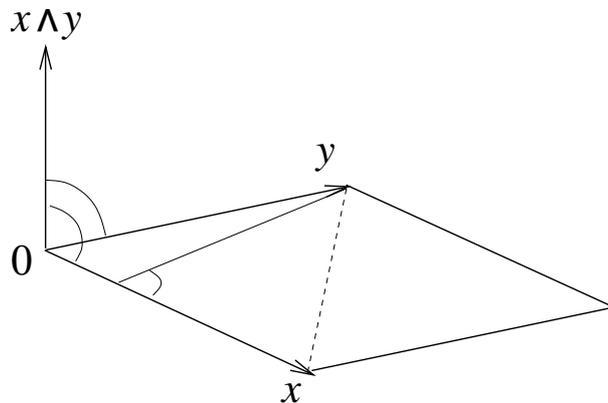


Abb. 9.2 Das Vektorprodukt

$\frac{1}{2}|x \wedge y|$ ist also die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten $0, x$ und y .

- (v) $x \wedge y = 0 \Leftrightarrow x$ und y sind linear abhängig
- (vi) $\langle x, x \wedge y \rangle = \langle y, x \wedge y \rangle = 0$

Der Vektor $x \wedge y$ steht also auf x und auf y senkrecht. Umgekehrt ist jeder auf x und gleichzeitig auf y senkrecht stehende Vektor ein skalares Vielfaches von $x \wedge y$.

Definition Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche im \mathbb{R}^3 mit Parameterdarstellung (ϕ, K) , $\phi \in C^1(G)$, $G \supset K$ offen. Dann definieren in $x = \phi(u) \in S$ die Tangentialvektoren $\partial_1 \phi(u)$ und $\partial_2 \phi(u)$ den *Normalenvektor*

$$N(u) = \partial_1 \phi(u) \wedge \partial_2 \phi(u)$$

sowie den *Normaleneinheitsvektor*

$$n(u) = \begin{cases} \frac{N(u)}{|N(u)|} & , \text{ falls } N(u) \neq 0 \\ 0 & , \text{ falls } N(u) = 0. \end{cases}$$

Beispiele

- (1) Sei $f \in C^1(G)$ und $S \subset \mathbb{R}^3$ die durch den Graphen von f beschriebene Fläche $S = \{\phi(u) : u \in K\}$ mit $\phi(u) = (u_1, u_2, f(u))^T$. Dann hat

$$D\phi(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \partial_1 f & \partial_2 f \end{pmatrix}$$

in jedem $u \in K$ den Rang 2, und es gilt

$$N(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_1 f \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_2 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_1 f \\ -\partial_2 f \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (2) Die Einheitskugel im \mathbb{R}^3 kann über $K = [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \subset G = \mathbb{R}^2$ durch

$$\phi(u) = \begin{pmatrix} \cos u_1 \cos u_2 \\ \sin u_1 \cos u_2 \\ \sin u_2 \end{pmatrix}$$

parametrisiert werden. Jetzt folgt

$$D\phi = \begin{pmatrix} -\sin u_1 \cos u_2 & -\cos u_1 \sin u_2 \\ \cos u_1 \cos u_2 & -\sin u_1 \sin u_2 \\ 0 & \cos u_2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \cos u_1 \cos^2 u_2 \\ \sin u_1 \cos^2 u_2 \\ \sin u_2 \cos u_2 \end{pmatrix},$$

also $N = \cos u_2 \cdot \phi(u_1, u_2)$ und $|N| = \cos u_2$. Wie erwartet ist N parallel zum Ortsvektor ϕ ; die Einheitskugel ist bei der hier gewählten Parametrisierung im Nord- und Südpol ($u_2 = \frac{\pi}{2}$ bzw. $u_2 = -\frac{\pi}{2}$) jedoch degeneriert.

Bemerkung Auf der Fläche S mit Parameterdarstellung (ϕ, K) besitzt das im Flächenpunkt $x = \phi(u)$ die Fläche linear approximierende Parallelogramm

$$P = \{\phi(u) + s_1 \partial_1 \phi(u) + s_2 \partial_2 \phi(u) : 0 \leq s_1 \leq \varepsilon_1, 0 \leq s_2 \leq \varepsilon_2\}$$

den Flächeninhalt

$$|\varepsilon_1 \partial_1 \phi(u) \wedge \varepsilon_2 \partial_2 \phi(u)| = \varepsilon_1 \varepsilon_2 |N(u)|.$$

Deshalb bezeichnet man in der folgenden Definition des Oberflächenintegrals den Ausdruck

$$do(u) = |N(u)| du$$

als *Oberflächenelement*.

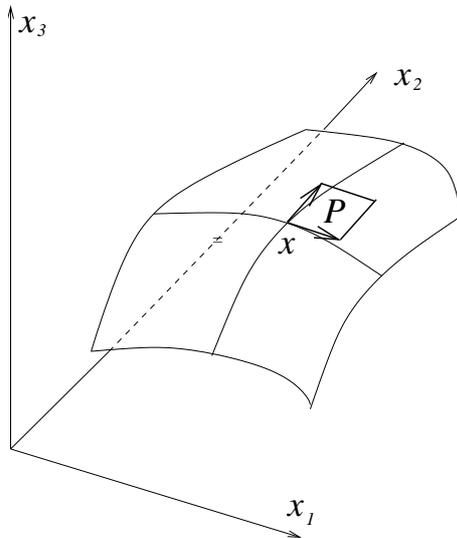


Abb. 9.3 Approximierendes Parallelogramm

Definition Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit Parameterdarstellung (ϕ, K) und sei $f : \phi(K) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt

$$\int_S f \, do := \int_K f(\phi(u)) |N(u)| \, du$$

das *Oberflächenintegral* von f über der Fläche S .

Für $f \equiv 1$ heißt

$$|S| = \int_S 1 \, do = \int_K |N(u)| \, du$$

der *Flächeninhalt* oder die *Oberfläche* von S .

Da es für eine Fläche S verschiedene Parametrisierungen gibt, ist zu zeigen, dass $\int_S f \, do$ unabhängig von der gewählten Parametrisierung ist (vgl. die entsprechende Aussage zur Bogenlänge und zum Kurvenintegral).

Lemma 9.1 Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit den Parametrisierungen (ϕ, K) , $G \supset K$ offen, und (ϕ', K') , $G' \supset K'$ offen, und sei $g : G' \rightarrow G$ eine injektive C^1 -Abbildung mit $g(K') = K$ und $\phi'(s) = \phi(g(s))$ auf G' . Die Normalenvektoren seien dementsprechend $N(u)$ auf K und $N'(s)$ auf K' . Ferner sei $\det Dg$ entweder strikt positiv oder strikt negativ auf G' . Dann gilt

$$\int_K f(\phi(u)) |N(u)| \, du = \int_{K'} f(\phi'(s)) |N'(s)| \, ds.$$

Beweis Wegen

$$\partial_1 \phi' = \partial_1 \phi \cdot \partial_1 g_1 + \partial_2 \phi \cdot \partial_1 g_2,$$

$$\partial_2 \phi' = \partial_1 \phi \cdot \partial_2 g_1 + \partial_2 \phi \cdot \partial_2 g_2$$

erhält man für den Normalenvektor $N'(s)$ in $x = \phi'(s) = \phi(u)$, $u = g(s)$,

$$\begin{aligned} N'(s) &= \partial_1 \phi' \wedge \partial_2 \phi' \\ &= (\partial_1 g_1)(\partial_2 g_1) \underbrace{\partial_1 \phi \wedge \partial_1 \phi}_{=0} + (\partial_1 g_1)(\partial_2 g_2) \underbrace{\partial_1 \phi \wedge \partial_2 \phi}_{=N(u)} \\ &\quad + (\partial_1 g_2)(\partial_2 g_1) \underbrace{\partial_2 \phi \wedge \partial_1 \phi}_{=-N(u)} + (\partial_1 g_2)(\partial_2 g_2) \underbrace{\partial_2 \phi \wedge \partial_2 \phi}_{=0} \\ &= (\partial_1 g_1 \cdot \partial_2 g_2 - \partial_1 g_2 \cdot \partial_2 g_1) N(u), \end{aligned}$$

also $|N'(s)| = |\det Dg(s)| |N(u)|$. Daraus folgt mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned} \int_K f(\phi(u)) |N(u)| du &= \int_{K'} f(\phi(g(s))) |\det Dg(s)| |N(g(s))| ds \\ &= \int_{K'} f(\phi'(s)) |N'(s)| ds. \end{aligned}$$

□

Beispiel Mit der oben benutzten Parametrisierung der Einheitskugel $S = \partial B_1(0)$ im \mathbb{R}^3 erhält man wegen $K = [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $|N(u)| = \cos u_2$,

$$|\partial B_1(0)| = \int_K \cos u_2 du = \int_0^{2\pi} du_1 \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos u_2 du_2 = 4\pi.$$

Analog zeigt man $|\partial B_R(0)| = 4\pi R^3$.

Hauptsatz 9.2 (Stokesscher Integralsatz) Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ offen und $K \subset G$ ein BV-Normalbereich, dessen Rand ∂K eine stückweise C^1 -Parametrisierung γ besitze. Ferner sei $\phi : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine C^2 -Abbildung und $S = \{\phi(u) : u \in K\}$ eine Fläche im \mathbb{R}^3 , deren "Rand" durch $\partial S = \phi(\partial K)$ definiert sei.

Ist $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $S \subset U$ und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein C^1 -Vektorfeld, gilt

$$\boxed{\int_S \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial S} F \cdot dx.}$$

Dieser Stokessche Integralsatz lautet im Parameterbereich

$$\int_K \operatorname{rot} F(\phi(u)) \cdot N(u) \, du = \int_{\phi(\gamma)} F \cdot dx.$$

Beweis Wir betrachten ein Vektorfeld F vom Typ $(P, 0, 0)^T$; der Beweis für $F = (0, Q, 0)^T$ und $F = (0, 0, R)^T$ verläuft analog.

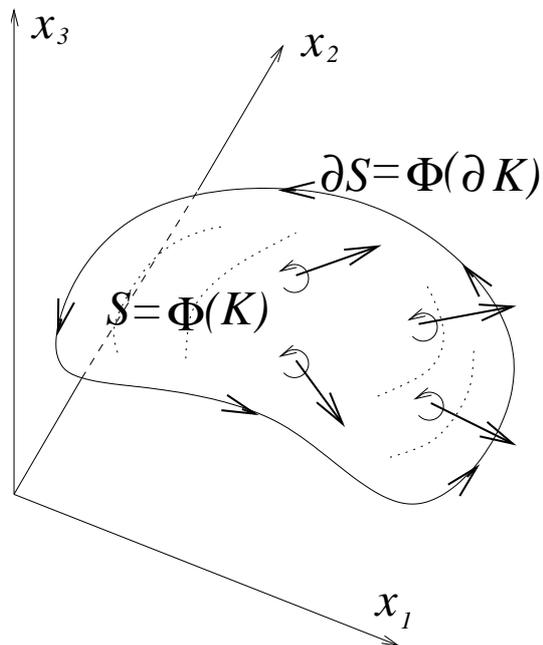


Abb. 9.4 Zum Stokesschen Integralsatz

Zuerst schreiben wir das Kurvenintegral $\int_{\partial S} F \cdot ds = \int_{\phi(\gamma)} F \cdot dx$ über die Kurve $\phi(\gamma) \subset \mathbb{R}^3$ in ein Kurvenintegral über die Kurve $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ um. Ist $\gamma : [0, 1] \rightarrow \partial K$ eine stückweise C^1 -Parametrisierung von ∂K , erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\phi(\gamma)} \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dx &= \int_0^1 P(\phi(\gamma(t))) (\phi_1 \circ \gamma)'(t) dt \\ &= \int_0^1 (P \circ \phi)(\gamma(t)) (\partial_1 \phi_1 \cdot \gamma_1' + \partial_2 \phi_1 \cdot \gamma_2')(t) dt \\ &= \int_{\gamma} P \circ \phi \begin{pmatrix} \partial_1 \phi_1 \\ \partial_2 \phi_1 \end{pmatrix} \cdot dx \end{aligned}$$

und mit dem Greenschen Satz 8.1

$$\int_{\gamma} (P \circ \phi) \nabla \phi_1 \cdot dx = \int_K \text{rot}((P \circ \phi) \nabla \phi_1) du.$$

Nach Definition der skalaren Rotation im \mathbb{R}^2 berechnet man

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot}((P \circ \phi)\nabla\phi_1) &= \partial_1((P \circ \phi)\partial_2\phi_1) - \partial_2((P \circ \phi)\partial_1\phi_1) \\
 &= (\partial_1(P \circ \phi))\partial_2\phi_1 - (\partial_2(P \circ \phi))\partial_1\phi_1 + (P \circ \phi) \underbrace{[\partial_1\partial_2\phi_1 - \partial_2\partial_1\phi_1]}_{=0} \\
 &= (\partial_1P \cdot \partial_1\phi_1 + \partial_2P \cdot \partial_1\phi_2 + \partial_3P \cdot \partial_1\phi_3)\partial_2\phi_1 \\
 &\quad - (\partial_1P \cdot \partial_2\phi_1 + \partial_2P \cdot \partial_2\phi_2 + \partial_3P \cdot \partial_2\phi_3)\partial_1\phi_1 \\
 &= \partial_2P \underbrace{(\partial_1\phi_2 \cdot \partial_2\phi_1 - \partial_1\phi_1 \cdot \partial_2\phi_2)}_{=-N_3} + \partial_3P \underbrace{(\partial_1\phi_3 \cdot \partial_2\phi_1 - \partial_2\phi_3 \cdot \partial_1\phi_1)}_{=N_2},
 \end{aligned}$$

da $\phi_1 \in C^2$ und $N = \partial_1\phi \wedge \partial_2\phi$. Wegen $\operatorname{rot} F = (0, \partial_3P, -\partial_2P)^T$ folgt

$$\operatorname{rot}((P \circ \phi)\nabla\phi_1) = ((\operatorname{rot} F) \circ \phi) \cdot N.$$

Zusammenfassend erhält man

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial S} F \cdot dx &= \int_{\gamma} (P \circ \phi)\nabla\phi_1 dx &= \int_K \operatorname{rot}((P \circ \phi)\nabla\phi_1) du \\
 &= \int_K ((\operatorname{rot} F) \circ \phi) \cdot N du &= \int_S \operatorname{rot} F \cdot n do.
 \end{aligned}$$

□

Definition

- (1) Eine kompakte Menge $V \subset \mathbb{R}^3$ heißt C^1 -Normalbereich bzgl. der x_1x_2 -Ebene, falls es ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^2$ und C^1 -Funktionen $\varphi_1 \leq \varphi_2$ auf einer offenen Obermenge von K gibt, so dass

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) = (x', x_3) \in \mathbb{R}^3 : x' \in K, \varphi_1(x') \leq x_3 \leq \varphi_2(x')\}$$

gilt, und falls ∂K durch eine stückweise C^1 -Kurve darstellbar ist. Analog werden C^1 -Normalbereiche bzgl. der x_2x_3 - und der x_1x_3 -Ebene definiert.

- (2) Das Kompaktum V heißt C^1 -Normalbereich, falls V ein C^1 -Normalbereich bzgl. der x_1x_2 -, der x_2x_3 - und bzgl. der x_1x_3 -Ebene ist.

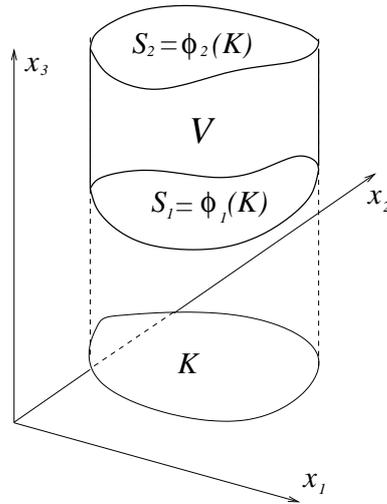


Abb. 9.5 Ein C^1 -Normalbereich bzgl. der x_1x_2 -Ebene

Bemerkung In (1) definiert der obere Deckel $S_2 = \varphi_2(K)$ eine reguläre C^1 -Fläche im \mathbb{R}^3 mit der Parameterdarstellung

$$\phi_2 : K \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad u = x' \mapsto \phi_2(x') = (x', \varphi_2(x')) .$$

Der Normalvektor $N(x') = (-\partial_1\varphi_2, -\partial_2\varphi_2, 1)^T$ definiert den bzgl. V äußeren Normaleneinheitsvektor

$$n(x') = \frac{N(x')}{|N(x')|} .$$

Für den unteren Deckel $S_1 = \varphi_1(K)$ ist dagegen $n(x') = -N(x')/|N(x')|$ der bzgl. V äußere Normaleneinheitsvektor.

Hauptsatz 9.3 (Gaußscher Divergenzsatz) Sei V ein C^1 -Normalbereich im \mathbb{R}^3 und F ein C^1 -Vektorfeld auf einer offenen Obermenge von V . Dann gilt

$$\boxed{\int_V \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial V} F \cdot n \, do .}$$

Beweis Es habe F die Gestalt $F = (0, 0, R)^T$. Dann gilt mit Satz 6.14 wegen $\operatorname{div} F = \partial_3 R$

$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{div} F \, dx &= \int_K \left(\int_{\varphi_1(x')}^{\varphi_2(x')} \partial_3 R(x', x_3) \, dx_3 \right) dx' \\ &= \int_K (R(x', \varphi_2(x')) - R(x', \varphi_1(x'))) \, dx' . \end{aligned}$$

Auf dem oberen Deckel $S_2 = \varphi_2(K)$ ist $F \cdot N = R N_3 = R$. Also folgt

$$\int_K R(x', \varphi_2(x')) dx' = \int_K F \cdot N dx' = \int_{S_2} F \cdot n do;$$

ebenso zeigt man

$$-\int_K R(x', \varphi_1(x')) dx' = \int_{S_1} F \cdot n do.$$

Auf dem noch fehlenden Randstück $\partial V \setminus S_1 \setminus S_2$, also auf

$$S_3 = \{(x', x_3) : x' \in \partial K, \varphi_1(x') \leq x_3 \leq \varphi_2(x')\},$$

existiert der äußere Normalenvektor n ebenfalls (bis auf endlich viele Geradenstücke $\{x'\} \times [\varphi_1(x'), \varphi_2(x')]$ mit $x' \in \partial K$, in denen die Parametrisierung von ∂K nicht differenzierbar ist). Da aber $n_3 = 0$ für $x \in S_3$ gilt, ist dort $F \cdot n = R n_3 = 0$.

Zusammenfassend erhält man

$$\int_V \operatorname{div} F dx = \sum_{j=1}^3 \int_{S_j} F \cdot n do = \int_{\partial V} F \cdot n do.$$

□

Korollar 9.4 (Partielle Integration im \mathbb{R}^3) Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ ein C^1 -Normalbereich und seien u, v C^1 -Funktionen auf einer offenen Obermenge von V . Dann gilt für $i = 1, 2, 3$

$$\boxed{\int_V u \partial_i v dx = - \int_V (\partial_i u) v dx + \int_{\partial V} u v n_i do.}$$

Beweis Satz 9.3 angewandt auf $F(x) := u v e_i$ liefert die Behauptung, da $\operatorname{div} F = u \partial_i v + (\partial_i u) v$ und $F \cdot n = u v n_i$. □

Bemerkungen

- (1) Satz 9.3 und Korollar 9.4 gelten unter schwächeren Voraussetzungen an V : das Kompaktum V lässt sich als endliche Vereinigung von nicht-überlappenden C^1 -Normalbereichen schreiben. Die Deckel der einzelnen Normalbereiche müssen nur "stückweise C^1 " sein.
- (2) Eine wesentlich schwächere Voraussetzung an V ist nur noch lokaler Natur: zu jedem Punkt $x \in \partial V$ gibt es eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^3$, so dass sich nach geeigneter Drehung des Koordinatensystems $U \cap \partial V$ als Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion schreiben lässt. In diesem Fall existiert der Normalenvektor nur noch "fast überall".
- (3) Satz 9.3 und Korollar 9.4 gelten in jeder Raumdimension $n \geq 2$.