11 Fourier-Reihen

Problemstellung: Es ist das Ziel, Funktionen durch einfach zu beschreibende und einfach auswertbare Funktionen möglichst gut anzunähern. Die naheliegende Wahl, Funktionen durch Polynome zu approximieren, liefert nach dem Satz von Taylor gute Ergebnisse für Funktionen hoher Differenzierbarkeit und lokal in der Nähe des Entwicklungspunktes:

$$f \in C^{n+1}[a-r, a+r] \quad \Rightarrow \quad f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

mit dem Taylor-Polynom n-ter Ordnung

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

und einem Restglied $R_n(x)$ mit der Fehlerabschätzung

$$|R_n(x)| \le \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}, \quad x \in [a-r, a+r].$$

Die Approximation p_n von f liefert also gute Ergebnisse (von der Ordnung $n+1$) für x nahe bei a und ist ggf. für großes $|x-a|$ nicht zu benutzen. So gilt für $f(x) = \cos x$ in einer Umgebung von $a = 0$

$$\big|f(x) - \big(1 - \frac{1}{2}x^2\big)\big| \le \frac{1}{24}\,|x-a|^4.$$

Dagegen ist $p_2(x) = p_3(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$ für $|x| \ge \frac{\pi}{2}$ eine völlig unbrauchbare Approximation von $\cos x$. Generell kann die Taylor-Approximation für (beschränkte) periodische Funktionen f auf $\mathbb{R}$ für großes $|x-a|$ keine guten Ergebnisse liefern, da jedes Polynom $p(x) \ne \text{const}$ für $|x-a| \to \infty$ divergiert.

Deshalb versuchen wir, eine 2π-periodische Funktion f durch Linearkombination der 2π-periodischen Funktionen

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx,$$

also durch ein *trigonometrisches Polynom*

$$F_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{11.1}$$

mit Koeffizienten $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ zu approximieren. Darüber hinaus besteht die Hoffnung, dass mit geeigneten *Fourier-Koeffizienten* $a_0, a_1, b_1, \ldots$ die *Fourier-Reihe*

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{11.2}$$

punktweise oder sogar gleichmäßig konvergiert und mit $f(x)$ übereinstimmt.

Wie können geeignete Koeffizienten $a_0, a_1, b_1, \ldots$ bestimmt werden? Wir nehmen an, dass die Reihe (11.2) gleichmäßig (!) auf $[-\pi, \pi]$ gegen f konvergiert. Beachte, dass Satz 8.2 dann $f \in C^0[-\pi, \pi]$ impliziert. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}_0$ nach Satz 10.9

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos mx \, dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx \, dx \\ &\quad + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx \, dx \big).\end{aligned}$$

Im Fall $m = 0$ gilt $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx = 2\pi$ und alle weiteren Integrale auf der rechten Seite verschwinden, so dass

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx \tag{11.3}$$

folgt. Dagegen benutzen wir für $m \in \mathbb{N}$ die Identitäten

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx \, dx &= \pi \delta_{km}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx \, dx &= 0,\end{aligned} \tag{11.4}$$

aus und schließen auf die Gleichung

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx,$$

vgl. (11.3) mit $m = 0$. Analog geht man zur Bestimmung der Koeffizienten b_m, $m \in \mathbb{N}$, vor: Aus der Gleichung

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx = \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin mx \, dx$$

folgt unter Ausnutzung von Satz 10.9 und der Identität

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx \, dx = \pi \delta_{km}, \quad k, m \in \mathbb{N}, \tag{11.5}$$

sofort

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx.$$

Definition Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch und auf $[-\pi, \pi]$ integrierbar. Dann heißen die Zahlen

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{11.6}$$

die (reellen) *Fourier-Koeffizienten* von f. Da die Konvergenz der zugehörigen *Fourier-Reihe* $F(x)$, s. (11.2), noch ungeklärt ist, schreiben wir

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{11.7}$$

Beispiel (1) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion mit

$$f(x) = |x| \quad \text{für } x \in [-\pi, \pi]. \tag{11.8}$$

Da f gerade ist, d.h. $f(-x) = f(x)$, und $\sin kx$ ungerade, verschwinden alle *Fourier-Sinus-Koeffizienten* b_k, $k \in \mathbb{N}$. Außerdem ist

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx,$$

woraus $a_0 = \pi$ und nach partieller Integration

$$a_k = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{k^2}\big(1 - (-1)^k\big), \quad k \in \mathbb{N},$$

folgt. Die Fourier-Reihe von f ist also eine reine *Cosinus-Reihe* und lautet

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\Big(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\Big). \tag{11.9}$$

Wegen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} < \infty$ konvergiert die Cosinus-Reihe nach Satz 8.2 und Satz 8.7 gleichmäßig auf $[-\pi, \pi]$ gegen eine stetige Funktion; es ist aber zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht bewiesen, ob der Grenzwert gleich $f(x)$ ist.

(2) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion mit

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} +1, & x \in (0, \pi) \\ -1, & x \in (-\pi, 0). \end{cases} \tag{11.10}$$

Da f ungerade ist, gilt $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, und

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign}\, x \sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin kx\,dx = \begin{cases} \frac{4}{k\pi}, & k = 1, 3, 5, \ldots \\ 0, & k = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

Folglich hat f die *Fourier-Sinus-Reihe*

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\big(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots \big)\,. \tag{11.11}$$

An dieser Stelle ist nicht einfach zu entscheiden, ob die Sinus-Reihe konvergiert. Rein formal erkennt man die Funktion in (11.8) und ihre Fourier-Reihe (11.9) als Stammfunktionen von (11.10) und (11.11).

Neben der reellen Schreibweise (11.6), (11.7) ist es vorteilhaft, die komplexe Schreibweise zu benutzen. Wegen $\sin y = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy})$, $\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} - e^{-iy})$ können wir (11.7) auch in der Form

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ikx} \tag{11.12}$$

mit den *komplexen Fourier-Koeffizienten*

$$c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k),\ k \in \mathbb{N},\ \text{und } c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k),\ k \in \mathbb{N},$$

schreiben. Nach (11.6) gilt dann

$$c_k = \hat{f}_k := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{11.13}$$

Der Vorteil der komplexen Schreibweise liegt also in der kurzen und einheitlichen Formulierung (11.12), (11.13).

In (11.13) benötigt man - insbesondere auch zur Behandlung komplexwertiger Funktionen f - die folgende Definition.

Definition Seien $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann heißt $f = u + iv : [a, b] \to \mathbb{C}$ integrierbar, falls u und v integrierbar sind. In diesem Fall setzt man

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx.$$

Beispiel (1) Für alle $\gamma \in \mathbb{R}^*$ gilt

$$\int_a^b e^{i\gamma x}\,dx = \frac{1}{i\gamma}\,e^{i\gamma x}\Big|_a^b = \frac{1}{i\gamma}(e^{i\gamma b} - e^{i\gamma a}).$$

(2) Für ein trigonometrisches Polynom

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{ikx}, \quad n \in \mathbb{N},$$

gilt für alle $m \in \mathbb{Z}$ mit $|m| \leq n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-imx}\, dx = 2\pi c_m$$

sowie $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx}\, dx = 0$ für $m \in \mathbb{Z}$, $|m| > n$.

Definition Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion aus dem Funktionenraum

$$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist } 2\pi\text{–periodisch, } f|_{[-\pi,\pi]} \text{ ist integrierbar}\}.$$

Dann heißen

$$c_k = \hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{11.14}$$

die (komplexen) *Fourier-Koeffizienten* von f und die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \sim f(x)$$

die *Fourier-Reihe* von f.

Satz 11.1 (Lemma von Riemann-Lebesgue) *Für jede Funktion $f \in V$ gilt*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{irx}\, dx \to 0 \text{ für } r \in \mathbb{R},\ |r| \to \infty. \tag{11.15}$$

Insbesondere folgt $\lim_{k \to \pm\infty} \hat{f}_k = 0$.

Beweis *1. Schritt*: Betrachte die charakteristische Funktion $f = \chi_{(a,b)}$ mit $-\pi \leq a \leq b \leq \pi$. Dann gilt für $r \in \mathbb{R}$, $|r| \to \infty$, wegen $|e^{-ira}| = 1$

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b e^{-irx}\, dx = \frac{i}{2\pi r}(e^{-irb} - e^{-ira}) \to 0. \qquad \blacksquare$$

2. Schritt: Sei f eine beliebige Treppenfunktion in V, also auf $(0, 2\pi)$ eine Funktion der Gestalt

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} d_j\, \chi_{(a_j, a_{j+1})}(x), \quad -\pi \leq a_0 \leq \ldots \leq a_{N+1} \leq \pi, \quad d_j \in \mathbb{C},\ N \in \mathbb{N}_0.$$

Dann gilt für $|r| \to \infty$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-irx}\, dx = \sum_{j=0}^{N} \frac{id_j}{r}(e^{-ira_{j+1}} - e^{-ira_j}) \to 0. \qquad \blacksquare$$

3. Schritt: Sei f eine beliebige reellwertige Funktion in V. Dann gibt es nach Satz 10.3 zu $\varepsilon > 0$ eine Partition P von $[-\pi, \pi]$ mit

$$U(P, f) - L(P, f) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entsprechend gibt es zu P und f Treppenfunktionen φ, ψ auf $[-\pi, \pi]$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\int \psi \, dx = U(P, f)$, $\int \varphi \, dx = L(P, f)$, also

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\psi - \varphi) \, dx = U(P, f) - L(P, f) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Insbesondere gilt auch

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\psi - f) \, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Damit folgt

$$\Big| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-irx} \, dx \Big| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f - \psi| \, dx + \Big| \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) e^{-irx} \, dx \Big| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |c_r(\psi)|,$$

wobei $c_r(\psi)$ das Integral $\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) e^{-irx} \, dx$ der Treppenfunktion ψ bezeichnet. Nach Schritt 2 ist bekannt, dass $|c_r(\psi)| \to 0$ für $|r| \to \infty$. Folglich gibt es ein $r_0 > 0$ mit $|c_r(\psi)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $|r| \geq r_0$. Jetzt folgt mit der obigen Abschätzung

$$\Big| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-irx} \, dx \Big| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{für } |r| \geq r_0.$$

Ist $f \in V$ komplexwertig, benutzt man das Ergebnis aus Schritt 3 für $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$. ■

Lemma 11.2 *Sei $f \in V$ eine Funktion mit Fourier-Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, und seien*

$$s_N(f, x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}, \quad N \in \mathbb{N},$$

die Fourier-Partialsummen von f. Dann gilt

$$s_N(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x - t) \, dt \tag{11.16}$$

mit dem sog. Dirichlet-Kern

$$D_N(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x}. \tag{11.17}$$

Dabei ist D_N eine gerade 2π-periodische Funktion mit der Eigenschaft

$$\int_0^{\pi} D_N(t) \, dt = \frac{1}{2}. \tag{11.18}$$

Beweis Nach Definition der c_k's, s. (11.15), gilt

$$
\begin{aligned}
s_N(f,x) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt\right)e^{ikx}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\sum_{k=-N}^{N} e^{ik(x-t)}\right)dt,
\end{aligned}
$$

also (11.16) mit $D_N(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} e^{ikx}$. Aus dieser Darstellung von D_N liest man ab, dass D_N eine gerade 2π-periodische Funktion mit $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,dt = 1$ ist; damit ist auch (11.18) bewiesen. Schließlich gilt für $|x| < \pi$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} &= e^{-iNx}\sum_{k=0}^{2N} e^{ikx} = e^{-iNx}\,\frac{1-e^{i(2N+1)x}}{1-e^{ix}}\\
&= \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x}\,.
\end{aligned}
$$

■

Satz 11.3 (Hauptsatz) *Die Funktion $f \in V$ sei im Punkte $a \in [-\pi,\pi]$ links- und rechtsseitig stetig differenzierbar, d.h., es existieren die einseitigen Grenzwerte*

$$
f(a\pm) = \lim_{x\to a\pm} f(x) \quad \textit{und} \quad f'(a\pm) = \lim_{x\to a\pm}\frac{f(x)-f(a\pm)}{x-a}\,.
$$

Dann gilt

$$
s_N(f,a) \to \frac{1}{2}\big(f(a+)+f(a-)\big) \quad \textit{für } N\to\infty. \tag{11.19}
$$

Ist f in a stetig und von links und rechts in a differenzierbar, konvergiert die Fourier-Reihe von f in a gegen $f(a)$:

$$
f(a) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,e^{ika}. \tag{11.20}
$$

Beweis Da f und D_N 2π-periodisch sind und D_N gerade ist, folgt nach (11.16)

$$
\begin{aligned}
s_N(f,a) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_N(a-t)\,dt\\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t+a)\,D_N(-t)\,dt\\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f_a(t)\,D_N(t)\,dt
\end{aligned}
$$

mit der Funktion $f_a(\cdot) = f(\cdot + a) \in V$. Dabei hat f_a in $t = 0$ die gleichen Eigenschaften wie f in a. Deshalb nehmen wir o. B. d. A. an, dass $a = 0$ gilt.

Zum Beweis der Aussage $s_N(f, 0) \to \frac{1}{2}\big(f(0+) + f(0-)\big)$ für $N \to \infty$ zeigen wir nun, dass

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi f(t) D_N(t) dt - \frac{1}{2} f(0+) \\
&\quad = \int_0^\pi \big(f(t) - f(0+)\big) D_N(t) \quad \text{s. (11.18)} \\
&\quad = \int_0^\pi \frac{f(t) - f(0+)}{2\pi \sin \frac{t}{2}} \, \sin(N + \frac{1}{2}) t \, dt
\end{aligned}$$

für $N \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Wegen $\sin(N + \frac{1}{2})t = \frac{1}{2i}\big(e^{i(N+\frac{1}{2})t} - e^{-i(N+\frac{1}{2})t}\big)$, ist das letzte Integral die Summe von Integralen vom Typ

$$\int_0^\pi g(t) \, e^{\pm i(N+\frac{1}{2})t} \, dt,$$

welches nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue (Satz 11.1) für jede Funktion $g \in V$ für $N \to \infty$ gegen 0 konvergiert.

Es bleibt also zu zeigen, dass

$$g(t) = \frac{f(t) - f(0+)}{2 \sin(t/2)}, \quad 0 < t \leq \pi,$$

auf $[0, \pi]$ integrierbar ist. Da nach der Regel von de L'Hôpital $\lim_{t \to 0} \frac{t/2}{\sin(t/2)} = 1$ ist und somit $\frac{t/2}{\sin(t/2)}$ als auf $[0, \pi]$ stetig fortsetzbare Funktion betrachtet werden kann, darf g durch

$$\tilde{g}(t) = \frac{f(t) - f(0+)}{t}, \quad t \in (0, \pi),$$

ersetzt werden. Nach Voraussetzung besitzt $\tilde{g}$ für $t \to 0+$ den rechtsseitigen Grenzwert $\tilde{g}(0) = f'(0+)$. Deshalb ist $\tilde{g}$ auf $[0, \pi]$ der Grenzwert der integrierbaren Funktionenfolge

$$\tilde{g}_n(t) = \begin{cases} f'(0+), & 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ \frac{f(t) - f(0+)}{t}, & \frac{1}{n} < t \leq \pi \end{cases}$$

bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz. Jetzt folgt mit Satz 10.9 die Integrierbarkeit von $\tilde{g}$ und auch $g(t) = \tilde{g}(t) \cdot \frac{t/2}{\sin t/2}$ auf $[0, \pi]$.

Analog zeigt man die Konvergenz

$$\int_{-\pi}^0 f(t) \, D_N(t) \, dt \to \frac{1}{2} f(0-)$$

für $N \to \infty$. Nun ist der Satz bewiesen. ■

Korollar 11.4 *Ist $f \in V$ stetig differenzierbar auf $[-\pi, \pi]$, konvergiert die Fourierreihe von f punktweise in $[-\pi, \pi]$ gegen f.*

Beispiel (1) Sei $f \in V$ die 2π-periodische Funktion mit $f(x) = |x|$ auf $[-\pi, \pi]$. Dann erfüllt f in jedem Punkt $x \in [-\pi, \pi]$ (einschließlich $x = 0$) die Voraussetzungen von Satz 11.3. Mit (11.9) folgt also für alle $x \in [-\pi, \pi]$

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}\,.$$

Insbesondere gilt für $x = 0$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots\,.$$

Daraus folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \text{ gerade}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

und schließlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Beispiel (2) Sei $f \in V$ die Funktion mit $f(x) = \operatorname{sign} x$ auf $(-\pi, \pi)$. Diese Funktion erfüllt die Voraussetzungen von Satz 11.3 (einschließlich $x = 0$ und $x = \pm\pi$) in allen Punkten $x \in (-\pi, \pi)$. Mit (11.11) folgt dann

$$\operatorname{sign} x = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}\,, \quad x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi);$$

die entsprechenden Identitäten in $x = 0$ und $x = \pm\pi$ sind trivial, da dort $\frac{1}{2}\big(f(x+) + f(x-)\big) = 0$ und $\sin(2k-1)x = 0$ für $k \in \mathbb{N}$ gilt. In $x = \frac{\pi}{2}$ erhält man wegen $\sin(2k-1)\frac{\pi}{2} = (-1)^k$, $k \in \mathbb{N}$, die bereits bekannte Identität

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1}\,.$$

Unter der Voraussetzung von Korollar 11.4, d.h., $f \in C^1(\mathbb{R})$ ist 2π-periodisch, ist zu erwarten, dass die Fourier-Reihe von f sogar gleichmäßig und nicht nur punktweise gegen f konvergiert. Das Lemma von Riemann-Lebesgue (Satz 11.1) besagt zwar $\lim_{|k|\to\infty} c_k = 0$; dieses Ergebnis reicht aber bei weitem nicht aus, allgemein gültige Aussagen zur punktweisen oder sogar gleichmäßigen Konvergenz der Fourier-Reihe zu gewinnen.

Lemma 11.5 *Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ 2π-periodisch und seien $\hat{f}_k$ bzw. $\hat{f}'_k$ die komplexen Fourier-Koeffizienten von f bzw. f'. Dann gilt*

$$\hat{f}'_k = ik\hat{f}_k, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{11.21}$$

Beweis Mit partieller Integration komplexwertiger Funktionen folgt

$$\begin{aligned}
\hat{f}_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\,f(x)\,\frac{1}{-ik}\,e^{-ikx}\,\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\frac{1}{-ik}\,e^{-ikx}\,dx \\
&= \frac{1}{ik}\,\hat{f}'_k
\end{aligned}$$

aufgrund der 2π-Periodizität von $f(x)$ und e^{-ikx}. ■

Definition 11.6 Auf dem Raum V führen wir das sog. *"Skalarprodukt"*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}, \quad \langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx,$$

mit den folgenden Eigenschaften ein:

$$\begin{aligned}
\langle f+g, h\rangle &= \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle && \text{für alle } f,g,h \in V \\
\langle f, g+h\rangle &= \langle f,g\rangle + \langle f,h\rangle && \text{für alle } f,g,h \in V \\
\langle \lambda f, g\rangle &= \lambda\langle f,g\rangle && \text{für alle } f,g \in V,\ \lambda \in \mathbb{C} \\
\langle f, \lambda g\rangle &= \overline{\lambda}\langle f,g\rangle && \text{für alle } f,g \in V,\ \lambda \in \mathbb{C} \\
\langle f, g\rangle &= \overline{\langle g,f\rangle} \\
\langle f, f\rangle &\geq 0
\end{aligned}$$

Ferner heißt $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$ die *"Norm"* von f.

Man beachte, dass aus $\|f\| = 0$ für $f \in V$ nicht notwendigerweise $f = 0$ folgt. Deshalb definiert $\langle\cdot,\cdot\rangle$ kein Skalarprodukt auf V im strengen Sinne, und $\|\cdot\|_2$ ist keine Norm. Dagegen ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf dem Raum $C^0[-\pi,\pi]$ ein Skalarprodukt und $\|\cdot\|_2$ eine Norm, die sogenannte L^2-Norm. Ohne Beweis erwähnen wir die typischen Eigenschaften einer Norm, die durch ein Skalarprodukt definiert wird:

$$\begin{aligned}
|\langle f,g\rangle| &\leq \|f\|_2\,\|g\|_2 && \text{(Ungleichung von Cauchy-Schwarz)} \\
\|f+g\|_2 &\leq \|f\|_2 + \|g\|_2 && \text{(Dreiecksungleichung)}
\end{aligned}$$

Satz 11.7 (Besselsche Ungleichung) *Für jedes $f \in V$ gilt*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2\,. \tag{11.22}$$

Insbesondere ist die Folge der Fourier-Koeffizienten (c_k) quadrat-summierbar, d.h. $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 < \infty$.

Beweis Die Funktionen $\varphi_k(x) = e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$, bilden ein sog. *Orthonormalsystem*, d.h., es gilt

$$\langle \varphi_k, \varphi_\ell \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\, e^{-i\ell x}\, dx = \delta_{k\ell}, \quad k, \ell \in \mathbb{Z}.$$

Insbesondere ist $\|\varphi_k\|_2 = 1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Nun folgt für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|f - \sum_{k=-N}^{N} c_k \varphi_k\|_2^2 \\
&= \Big\langle f - \sum_{k=N}^{N} c_k \varphi_k,\ f - \sum_{\ell=-N}^{N} c_\ell \varphi_\ell \Big\rangle \\
&= \langle f, f \rangle - \sum_{k=-N}^{N} \big(c_k \langle \varphi_k, f \rangle + \overline{c}_k \langle f, \varphi_k \rangle \big) + \sum_{k,\ell=-N}^{N} c_k \overline{c}_\ell \langle \varphi_k, \varphi_\ell \rangle \\
&= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-N}^{N} 2 c_k \overline{c}_k + \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 \\
&= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 .
\end{aligned}$$

Da die Abschätzung $\sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2$ gleichmäßig in $N \in \mathbb{N}$ gilt, folgt die Behauptung. ∎

Nach diesen Vorbereitungen können wir beweisen, dass die Fourierreihe für eine Funktion $f \in V \cap C^1(\mathbb{R})$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Satz 11.8 (Hauptsatz) *Sei $f \in V \cap C^1(\mathbb{R})$. Dann gilt*

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ikx}$$

im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz.

Beweis Da die obige Identität nach Korollar 11.4 bereits punktweise bekannt ist, bleibt zu zeigen, dass die Fourier-Reihe eine Cauchy-Folge bzgl. der gleichmäßigen Konvergenz, also bzgl. der Supremumsnorm $\|\cdot\|$, ist. Für $m, n \in \mathbb{N}$, $n > m$, gilt

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{m \leq |k| \leq n} c_k e^{ikx} \Big\| &\leq \sum_{m \leq |k| \leq n} |c_k| = \sum_{m \leq |k| \leq n} |k c_k| \frac{1}{|k|} \\
&\leq \frac{1}{2} \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k c_k|^2 + \sum_{m \leq |k| \leq n} \frac{1}{|k|^2} \Big) ; \qquad (11.23)
\end{aligned}$$

dabei wurde im letzten Schritt in jedem Summanden die elementare Ungleichung $|ab| \leq \frac{1}{2}\big(|a|^2 + |b|^2\big)$ für beliebige $a, b \in \mathbb{C}$ ausgenutzt. Nun ist mit $\hat{f}_k = c_k$ und $\hat{f}'_k$ wie in Lemma 11.5 wegen (11.21) und der Besselschen Ungleichung

$$\sum_k |kc_k|^2 = \sum_k |\hat{f}'_k|^2 \leq \|f'\|_2^2 < \infty.$$

Außerdem konvergiert $\sum_{m \leq |k| \leq n} \frac{1}{|k|^2}$ wegen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \ \big(= \frac{\pi^2}{6}\big) < \infty$ für $m \to \infty$ gegen 0. Somit zeigt (11.23), dass die Fourier-Reihe von f eine Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|$ ist; sie konvergiert also gleichmäßig gegen eine stetige Funktion g auf $[-\pi, \pi]$. Aufgrund der punktweisen Konvergenz muss aber $g = f$ gelten. ■