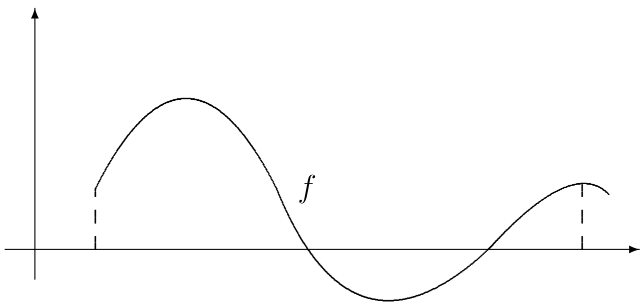
10 Das Riemannsche Integral

Für eine möglichst große Klasse von reellen Funktionen möchte man den Inhalt der Fläche bestimmen, die begrenzt ist durch den Graphen der gegebenen Funktion und der Abszissenachse.



Für „komplizierte“ Funktionen ist es allerdings schwer zu sagen, was dieser Flächeninhalt sein soll. Als Beispiel betrachte man die Dirichlet–Funktion

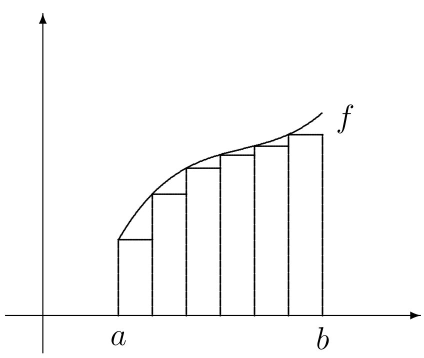
$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q} \\ 0\,, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

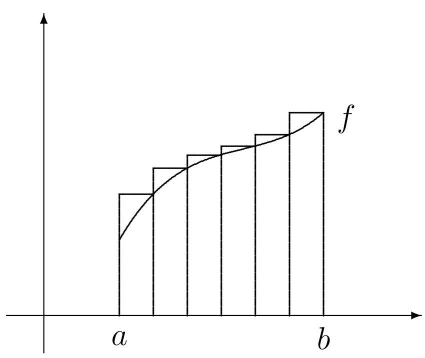
Die Aufgabe besteht also darin, Mengen, die „begrenzt“ werden durch Funktionsgraphen, eine Zahl zuzuordnen, die man das Integral der entsprechenden Funktion nennt, und die Eigenschaft hat, wie man sie intuitiv vom Flächeninhalt erwartet. Es wird sich zeigen, daß dies nicht für alle Funktionen möglich ist.

In diesem Kapitel werden wir das Riemannsche Integral für reelle Funktionen besprechen. Man kann auch Riemannsche Integrale für Funktionen von n Veränderlichen definieren.

10.1 Definition des Riemannschen Integrals für Funktionen einer Variablen

Sei $-\infty < a < b < \infty$, und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Zur Berechnung des Inhalts der Fläche unter dem Graphen von f ist es naheliegend, diese Fläche durch Rechtecke auszuschöpfen:





Bei Verfeinerung der Unterteilung wird der Flächeninhalt der Rechtecke in anschaulichem Sinn gegen den Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen von f konvergieren. Man kann die Fläche unter dem Graphen von f auch durch Rechtecke überdecken. Auch in diesem Fall konvergiert der Flächeninhalt der Rechtecke in anschaulichem Sinn gegen den Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen von f, wenn man die Unterteilung in Rechtecke verfeinert.

Man erwartet also, daß der Flächeninhalt der „ausschöpfenden Rechtecksfläche" und der Flächeninhalt der „überdeckenden Rechtecksfläche" bei Verfeinerung der Unterteilung gegen dieselbe Zahl konvergieren. Diese Zahl wird man als Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen von f bezeichnen.

Klar ist aber, daß diese Flächeninhalte der überdeckenden und der ausschöpfenden Rechtecksflächen nicht für alle f bei Verfeinerung der Unterteilung gegen dieselbe Zahl konvergieren werden. Ein Beispiel dafür ist wieder die Dirichletfunktion.

Diejenigen Funktionen f, für die die Flächeninhalte der überdeckenden Rechtecksfläche und der ausschöpfenden Rechtecksfläche gegen dieselbe Zahl konvergieren, heißen „Riemann–integrierbar", und diese Zahl heißt „Riemann–Integral" von f über dem Intervall $[a, b]$. Die anderen Funktionen heißen „nicht Riemann–integrierbar". Dieses „Programm" wird nun durchgeführt.

Definition: Sei $-\infty < a < b < \infty$. Unter einer Partition P des Intervalls $[a, b]$ versteht man eine endliche Menge $\{x_0, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ mit

$$a = x_0 < x_1 < \ldots \quad < x_{n-1} < x_n = b .$$

Zur Abkürzung sei $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, \ldots, n)$.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte reelle Funktion und $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Partition von $[a, b]$. Sei

$$\begin{array}{rcl} M_i & = & \sup\{f(x) \,\big|\, x_{i-1} \le x \le x_i\} \\ m_i & = & \inf\{f(x) \,\big|\, x_{i-1} \le x \le x_i\} \end{array}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

und sei

$$\begin{aligned} U(P, f) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \\ L(P, f) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i . \end{aligned}$$

Definition: Sei

$$\begin{aligned}\overline{\int_a^b} f dx &= \inf \left\{ U(P,f) \,\middle|\, P \quad \text{Partition von} \quad [a,b] \right\} \\ \underline{\int_a^b} f dx &= \sup \left\{ L(P,f) \,\middle|\, P \quad \text{Partition von} \quad [a,b] \right\}.\end{aligned}$$

Die Zahlen $\overline{\int_a^b} f dx$ und $\underline{\int_a^b} f dx$ heißen oberes und unteres Riemannintegral von f. Wenn das obere und untere Riemannintegral übereinstimmen, heißt f Riemann–integrierbar, und der gemeinsame Wert des oberen und unteren Riemannintegrals wird mit

$$\int_a^b f dx \quad \text{oder} \quad \int_a^b f(x) dx$$

bezeichnet. Diese Zahl heißt Riemannintegral von f. Die Menge der beschränkten, Riemann–integrierbaren Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$ wird mit $\mathcal{R}([a,b])$ bezeichnet.

Nach Voraussetzung ist f beschränkt, also existieren Zahlen m, M mit

$$m \leq f(x) \leq M$$

für alle $x \in [a,b]$. Hieraus folgt $m \leq m_i \leq M_i \leq M$, also

$$\begin{aligned}m(b-a) &= \sum_{i=1}^n m \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = L(P,f) \\ &\leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = U(P,f) \leq \sum_{i=1}^n M \Delta x_i = M(b-a),\end{aligned}$$

also existieren das Infimum der Menge

$$\left\{ U(P,f) \,\middle|\, P \quad \text{Partition von} \quad [a,b] \right\}$$

und das Supremum der Menge

$$\left\{ L(P,f) \,\middle|\, P \quad \text{Partition von} \quad [a,b] \right\},$$

also ist die voranstehende Definition sinnvoll.

10.2 Kriterien für Riemann–integrierbare Funktionen

Um mit dem Begriff des Riemannintegrals sinnvoll arbeiten zu können, müssen einfache Kriterien dafür gefunden werden, daß eine gegebene Funktion Riemann–integrierbar ist.

Im Folgenden werden solche Kriterien hergeleitet.

Definition: Seien P, P^* Partitionen von $[a,b]$. P^* heißt Verfeinerung von P, wenn $P \subseteq P^*$ gilt. P^* heißt gemeinsame Verfeinerung der Partitionen P_1 und P_2, wenn $P^* = P_1 \cup P_2$.

Satz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, und sei P^* eine Verfeinerung der Partition P von $[a,b]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} L(P,f) &\leq L(P^*,f) \\ U(P^*,f) &\leq U(P,f). \end{aligned}$$

Beweis: Sei $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$, und es werde zunächst angenommen, daß P^* genau einen Punkt x^* mehr enthält als P. Dann gibt es $x_{j-1}, x_j \in P$ mit $x_{j-1} < x^* < x_j$. Seien

$$\begin{aligned} w_1 &= \inf\left\{ f(x) \,\middle|\, x_{j-1} \leq x \leq x^* \right\} \\ w_2 &= \inf\left\{ f(x) \,\middle|\, x^* \leq x \leq x_j \right\}. \\ m_i &= \inf\left\{ f(x) \,\middle|\, x_{i-1} \leq x \leq x_i \right\}, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} L(P,f) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{j-1} m_i \Delta x_i \\ &\quad + m_j(x^* - x_{j-1} + x_j - x^*) + \sum_{i=j+1}^{n} m_i \Delta x_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{j-1} m_i \Delta x_i + w_1(x^* - x_{j-1}) + w_2(x_j - x^*) + \sum_{i=j+1}^{n} m_i \Delta x_i \\ &= L(P^*,f). \end{aligned}$$

Wenn P^* eine Verfeinerung von P ist, die k Punkte mehr enthält als P, genügt es diese Überlegungen k mal zu wiederholen. (Vollständige Induktion!)
Die zweite Ungleichung des Satzes beweist man ebenso. ∎

Satz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt

$$\underline{\int_a^b} f\,dx \leq \overline{\int_a^b} f\,dx$$

Beweis: Seien P_1 und P_2 Partitionen, und sei P^* die gemeinsame Verfeinerung. Nach Definition gilt

$$L(P^*,f) \leq U(P^*,f),$$

und aus dem vorangehenden Satz folgt

$$L(P_1, f) \leq L(P^*, f) \leq U(P^*, f) \leq U(P_2, f)\,,$$

also

$$L(P_1, f) \leq U(P_2, f)$$

für alle Partitionen P_1, P_2 von $[a, b]$. Somit ist $U(P_2, f)$ eine obere Schranke der Menge

$$\left\{ L(P, f) \,\middle|\, P \quad \text{Partition von} \quad [a, b] \right\}.$$

Somit ist $U(P_2, f)$ nicht kleiner als das Supremum dieser Menge, also

$$\underline{\int_a^b} f dx \leq U(P_2, f)\,.$$

Aus dieser Ungleichung folgt nun, daß $\underline{\int_a^b} f dx$ eine untere Schranke der Menge

$$\left\{ U(P, f) \,\middle|\, P \quad \text{Partition von} \quad [a, b] \right\}$$

ist, also ist $\underline{\int_a^b} f dx$ nicht größer als das Infimum dieser Menge, somit

$$\underline{\int_a^b} f dx \leq \overline{\int_a^b} f dx\,.$$

■

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Es gilt $f \in \mathcal{R}([a, b])$ dann und nur dann wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Partition P existiert mit

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon\,.$$

Beweis: „$\Longleftarrow$“ Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiere eine Partition P mit $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$. Da für jede Partition P^* gilt

$$L(P^*, f) \leq \underline{\int_a^b} f dx \leq \overline{\int_a^b} f dx \leq U(P^*, f)\,,$$

folgt

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f dx - \underline{\int_a^b} f dx \leq U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon\,,$$

also

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f dx - \underline{\int_a^b} f dx < \varepsilon$$

für jedes $\varepsilon > 0$, somit

$$\underline{\int_a^b} f dx = \overline{\int_a^b} f dx\,,$$

also $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

„$\Longrightarrow$“ Sei $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Nach Definition von Infimum und Supremum gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Partitionen P_1 und P_2 mit

$$\begin{aligned}
\int_a^b f dx &= \overline{\int_a^b} f dx \leq U(P_1, f) \leq \overline{\int_a^b} f dx + \frac{\varepsilon}{2} \\
\int_a^b f dx &= \underline{\int_a^b} f dx \geq L(P_2, f) \geq \underline{\int_a^b} f dx - \frac{\varepsilon}{2}\,.
\end{aligned}$$

Sei P die gemeinsame Verfeinerung von P_1 und P_2. Dann folgt

$$\int_a^b f dx - \frac{\varepsilon}{2} \leq L(P,f) \leq \int_a^b f dx \leq U(P,f) \leq \int_a^b f dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

also

$$U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon\,.$$

■

Aus diesem Satz folgt, daß $\mathcal{R}([a,b])$ die Klasse $C([a,b])$ enthält. Denn es gilt:

Satz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Außerdem gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit

$$\Big| \sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i - \int_a^b f dx \Big| < \varepsilon$$

für jede Partition $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ von $[a,b]$ mit $\max_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i < \delta$, und für jede Wahl von Punkten $t_1, \ldots, t_n$ mit $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

$$\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i$$

heißt Riemannsche Summe.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Setze

$$\eta = \frac{\varepsilon}{(b-a)}\,.$$

Da f stetig ist auf dem kompakten Intervall $[a,b]$, ist f beschränkt und auch gleichmäßig stetig. Also existiert $\delta > 0$, so daß

$$|f(x) - f(t)| < \eta \qquad (*)$$

für alle $x, t \in [a,b]$ mit $|x-t| < \delta$. Man wähle nun eine Partition $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ von $[a,b]$ mit $\max_{i=1,\dots,n} \Delta x_i < \delta$. Dann folgt aus $(*)$ für alle $x, t \in [x_{i-1}, x_i]$

$$f(x) - f(t) < \eta ,$$

also

$$\begin{aligned} M_1 - m_1 &= \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) - \inf_{x_{i-1} \le t \le x_i} f(t) \\ &= \max_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) - \min_{x_{i-1} \le t \le x_i} f(t) \\ &= f(x_0) - f(t_0) < \eta , \end{aligned}$$

für geeignete $x_0, t_0 \in [x_{i-1}, x_i]$. Also folgt

$$\begin{aligned} U(P,f) - L(P,f) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta x_i < \eta \sum_{i=1}^n \Delta x_i \\ &= \eta(b-a) = \varepsilon . \end{aligned} \qquad \binom{*}{*}$$

Nach dem vorangehenden Satz ist also $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Wegen

$$\begin{aligned} L(P,f) &\le \sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i \le U(P,f) \\ L(P,f) &\le \int_a^b f dx \le U(P,f) \end{aligned}$$

folgt aus $\binom{*}{*}$ auch

$$\Big| \int_a^b f dx - \sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i \Big| < \varepsilon .$$

■

Auch die Klasse der monotonen Funktionen gehört zu $\mathcal{R}([a,b])$:

Satz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton. Dann ist $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

Beweis: Sei f monoton wachsend. f ist beschränkt wegen $f(a) \le f(x) \le f(b)$ für alle $x \in [a,b]$. Sei $\varepsilon > 0$. Zu beliebigem $n \in \mathbb{N}$ setze

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i , \quad i = 0, 1, \dots, n .$$

$P = \{x_0, \dots, x_n\}$ ist eine Partition von $[a,b]$, und wegen der Monotonie von f gilt

$$\begin{aligned} m_i &= \inf \Big\{ f(x) \Big| x_{i-1} \le x \le x_i \Big\} = f(x_{i-1}) \\ M_1 &= \sup \Big\{ f(x) \Big| x_{i-1} \le x \le x_i \Big\} = f(x_i) , \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
U(P,f) - L(P,f) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(f(x_i) - f(x_{i-1})\Big)\frac{b-a}{n} = \Big(f(b) - f(a)\Big)\frac{b-a}{n} < \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

wenn $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß gewählt ist. Also ist $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Für monoton fallendes f verläuft der Beweis genauso. ∎

10.3 Einfache Eigenschaften des Riemann-Integrals

Satz: (i) Für $f_1, f_2 \in \mathcal{R}([a,b])$ gilt $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}([a,b])$ und

$$\int_a^b (f_1 + f_2)dx = \int_a^b f_1 dx + \int_a^b f_2 dx\,.$$

Für $f \in \mathcal{R}([a,b])$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt $cf \in \mathcal{R}[(a,b)]$ und

$$\int_a^b cf dx = c\int_a^b f dx\,.$$

Also ist $\mathcal{R}([a,b])$ ein Vektorraum.

(ii) Wenn $f_1, f_2 \in \mathcal{R}([a,b])$ und $f_1(x) \leq f_2(x)$ ist für alle $x \in [a,b]$, dann folgt

$$\int_a^b f_1 dx \leq \int_a^b f_2 dx$$

(iii) Wenn $f \in \mathcal{R}([a,b])$ und wenn $a < c < b$, dann

$$f\big|_{[a,c]} \in \mathcal{R}\Big([a,c]\Big)\,, \quad f\big|_{[c,b]} \in \mathcal{R}\Big([c,b]\Big)\,,$$

und

$$\int_a^c f dx + \int_c^b f dx = \int_a^b f dx\,.$$

(iv) Wenn $f \in \mathcal{R}([a,b)]$ und $|f(x)| \leq M$, dann ist

$$\Big|\int_a^b f dx\Big| \leq M(b-a)\,.$$

Beweis: (i) Sei $f = f_1 + f_2$, und sei P eine Partition von $[a,b]$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x) &= \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} \Big(f_1(x) + f_2(x)\Big) \\
&\geq \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f_1(x) + \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f_2(x)\,,
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) &= \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i}\Big(f_1(x)+f_2(x)\Big)\\ &\le \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f_1(x)+\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f_2(x)\,,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}L(P,f_1)+L(P,f_2) &\le L(P,f)\le U(P,f)\\ &\le U(P,f_1)+U(P,f_2)\,.\end{aligned}\tag{+}$$

Zu $\varepsilon>0$ wähle Partitionen P_1 und P_2 mit

$$U(P_j,f_j)-L(P_j,f_j)<\varepsilon\,,\quad j=1,2\,.$$

Sei P die gemeinsame Verfeinerung von P_1 und P_2. Dann folgt

$$U(P,f_j)-L(P,f_j)<\varepsilon\,,\quad j=1,2\,,\tag{++}$$

und somit, wegen (+),

$$\begin{aligned}U(P,f)-L(P,f)\le U(P,f_1)+U(P,f_2)\\ -L(P,f_1)-L(P,f_2)<2\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Da $\varepsilon>0$ beliebig war, folgt hieraus $f=f_1+f_2\in\mathcal{R}([a,b])$.
Aus (++) folgt auch

$$U(P,f_j)<\int_a^b f_j dx+\varepsilon$$

und somit, wegen (+),

$$\int_a^b f dx\le U(P,f)\le\int_a^b f_1 dx+\int_a^b f_2 dx+2\varepsilon\,.$$

Da ε beliebig war, ergibt dies

$$\int_a^b f dx\le\int_a^b f_1 dx+\int_a^b f_2 dx\,.$$

Ebenso folgt

$$\int_a^b f dx\ge\int_a^b f_1 dx+\int_a^b f_2 dx\,,$$

also

$$\int_a^b f dx=\int_a^b f_1 dx+\int_a^b f_2 dx\,.$$

Die Behauptungen (ii) – (iv) werden ganz ähnlich bewiesen. Die Beweise bleiben dem Leser überlassen. ■

Satz: Seien $-\infty < m < M < \infty$ und $f \in \mathcal{R}([a,b])$ mit $f : [a,b] \to [m,M]$. Sei $\Phi : [m,M] \to \mathbb{R}$ stetig, und sei $h = \Phi \circ f$. Dann ist $h \in \mathcal{R}([a,b])$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Da Φ gleichmäßig stetig ist auf $[m,M]$, gibt es ein $\delta > 0$ mit $\delta < \varepsilon$ und mit $|\Phi(s) - \Phi(t)| < \varepsilon$ für alle $s,t \in [m,M]$ mit $|s-t| \leq \delta$. Weil $f \in \mathcal{R}[(a,b)]$ ist gibt es außerdem eine Partition $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ von $[a,b]$, so daß

$$U(P,f) - L(P,f) < \delta^2 . \tag{$*$}$$

Seien

$$\begin{aligned} M_i &= \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), \qquad & m_i &= \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \\ M_i^* &= \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} h(x), \qquad & m_i^* &= \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} h(x) . \end{aligned}$$

Setze

$$\begin{aligned} A &= \{ i \,\big|\, i \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq n,\ M_i - m_i < \delta \} \\ B &= \{1, \ldots, n\} \setminus A . \end{aligned}$$

Wenn $i \in A$ ist, folgt für alle x,y mit $x_{i-1} \leq x, y \leq x_i$

$$|h(x) - h(y)| = \Big| \Phi\Big(f(x)\Big) - \Phi\Big(f(y)\Big) \Big| < \varepsilon$$

wegen $|f(x) - f(y)| \leq M_i - m_i < \delta$. Dies liefert

$$M_i^* - m_i^* \leq \varepsilon .$$

Wenn $i \in B$ ist, gilt

$$M_i^* - m_i^* \leq 2K ,$$

mit $K = \sup_{m \leq t \leq M} |\Phi(t)|$. Aus $(*)$ folgt außerdem

$$\delta \sum_{i \in B} \Delta x_i \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i = U(P,f) - L(P,f) < \delta^2 ,$$

also

$$\sum_{i \in B} \Delta x_i < \delta .$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
U(P,h) - L(P,h) &= \sum_{i\in A}(M_i^* - m_i^*)\Delta x_i + \sum_{i\in B}(M_i^* - m_i^*)\Delta x_i \\
&\le \delta \sum_{i\in A} \Delta x_i + 2K \sum_{i\in B} \Delta x_i \\
&\le \delta(b-a) + 2K\delta \le \varepsilon(b-a+2K)\,,
\end{aligned}$$

wegen $\delta < \varepsilon$. Da ε beliebig gewählt war, folgt hieraus $h \in \mathcal{R}([a,b])$. ■

Folgerung: Seien $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$. Dann gilt

a.) $fg \in \mathcal{R}([a,b])$

b.) $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$ und $\displaystyle\Big|\int_a^b f dx\Big| \le \int_a^b |f|\, dx\,.$

Beweis: Mit $\Phi(t) = t^2$ zeigt der vorangehende Satz, daß $f^2 = \Phi \circ f \in \mathcal{R}([a,b])$ ist. Wegen

$$fg = \frac{1}{4}\Big[(f+g)^2 - (f-g)^2\Big]$$

folgt also auch $fg \in \mathcal{R}([a,b])$.
Mit $\Phi(t) = |t|$ folgt aus dem vorangehenden Satz, daß $|f| = \Phi \circ f \in \mathcal{R}([a,b])$. Wähle $c = \pm 1$, so daß

$$c\int_a^b f dx \ge 0\,.$$

Dann ergibt sich

$$\Big|\int_a^b f dx\Big| = c\int_a^b f dx = \int_a^b cf dx \le \int_a^b |f| dx\,,$$

wegen $cf(x) \le |f(x)|$ für alle $x \in [a,b]$. ■

10.4 Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung

Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Man setzt

$$\int_b^a f dx = -\int_a^b f dx\,.$$

Es gilt dann

$$\int_u^v f dx + \int_v^w f dx = \int_u^w f dx$$

wenn u, v, w beliebige Punkte von $[a,b]$ sind.

Satz: (Mittelwertsatz der Integralrechnung). Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Stelle c mit $a \le c \le b$, so daß gilt

$$\int_a^b f dx = f(c)(b-a)\,.$$

Beweis: f ist auf einem kompakten Intervall definiert und stetig, also integrierbar. Da das Integral monoton ist, gilt

$$\begin{aligned}(b-a)\min_{x\in[a,b]} f(x) &= \int_a^b \min_{y\in[a,b]} f(y)dx \le \int_a^b f(x)dx \\ &\le \int_a^b \max_{y\in[a,b]} f(y)dx = \max_{x\in[a,b]} f(x)(b-a)\,.\end{aligned}$$

Da f das Minimum und das Maximum auf $[a, b]$ annimmt, existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $c \in [a, b]$ mit

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\,.$$

■

Satz: Sei $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Dann ist

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

eine stetige Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Beweis: Es existiert M mit $|f(x)| \le M$ für alle $x \in [a, b]$. Also gilt für $x, x_0 \in [a, b]$ mit $x_0 < x$

$$\begin{aligned}\Big|F(x) - F(x_0)\Big| &= \Big|\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\Big| \\ &= \Big|\int_{x_0}^x f(t)dt\Big| \le M(x-x_0)\,.\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Stetigkeit von F auf $[a, b]$. ■

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die durch

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

definierte Funktion differenzierbar, und es gilt

$$F' = f\,.$$

Die Funktion F ist also Stammfunktion von f.

Beweis: Sei $x_0 \in [a,b]$. Dann gilt nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{1}{x-x_0}\Big[\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\Big] \\
&= \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{1}{x-x_0}\, f(y)(x-x_0) \\
&= \lim_{y\to x_0} f(y) = f(x_0)\,,
\end{aligned}$$

für geeeignetes y zwischen x_0 und x. ■

Hauptsatz der Differential und Integralrechnung: Ist f Stammfunktion der stetigen Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, dann gilt

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b .$$

Beweis: Die Funtkion $x \mapsto \int_a^b f(t)dt$ ist eine Stammfunktion zu f, also existiert eine Konstante c mit

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + c$$

für alle $x \in [a,b]$. Hieraus folgt $c = F(a)$, also $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$. ■

Dieser Satz ist das wichtigste Hilfsmittel zur Berechnung von Integralen:

Beispiele:

1.) $$\int_a^b x^c dx = \frac{1}{c+1}\, x^{c+1}\Big|_a^b ,$$

falls $0 < a < b$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq -1$. Für $c < -1$ gilt

$$\lim_{m\to\infty} \int_a^m x^c dx = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{c+1}\, m^{c+1} - \frac{1}{c+1}\, a^{c+1} = -\frac{1}{c+1}\, a^{c+1} .$$

Daher definiert man

$$\int_a^\infty x^c dx = \lim_{m\to\infty} \int_a^m x^c dx = -\frac{1}{c+1}\, a^{c+1} .$$

Das Integral $\int_a^\infty x^c dx$ heißt uneigentliches Riemannintegral, und man sagt, für $c < -1$ sei x^c im uneigentlichen Sinn Riemann–integrierbar über $[a,\infty)$ mit $a > 0$. Insbesondere ergibt sich

$$\int_1^\infty x^{-2} dx = 1 .$$

2.) $$\int_a^b \frac{1}{x}\, dx = \ln b - \ln a\,,$$

für $0 < a < b < \infty$. $\frac{1}{x}$ ist nicht integrierbar über $[1,\infty)$.

3.)
$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin b - \arcsin a$$
für $-1 < a < b < 1$.

Man setzt
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\substack{b\to 1\\ b<1}} \lim_{\substack{a\to -1\\ a>-1}} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$= \lim_{b\to 1} \arcsin b - \lim_{a\to -1} \arcsin a = \frac{\pi}{2} - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \pi\,.$$

Die Funktion $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ist im uneigentlichen Sinn Riemann–integrierbar über dem Intervall $[-1,1]$.

Satz: (Substitutionsregel) f sei stetig, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar, und die Hintereinanderausführung $f \circ g$ existiere. Dann gilt
$$\int_a^b f\Big(g(t)\Big)g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx\,.$$

Beweis: Es existiert eine Stammfunktion F von f, und da F denselben Definitionsbereich wie f hat, existiert die Hintereinanderausführung $F \circ g$. Nach der Kettenregel gilt
$$(F \circ g)' = (F' \circ g)g' = (f \circ g)g'\,,$$
also
$$F\Big(g(b)\Big) - F\Big(g(a)\Big) = \int_a^b f\Big(g(t)\Big)g'(t)dt\,.$$
Wegen
$$F\Big(g(b)\Big) - F\Big(g(a)\Big) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$$
folgt die Behauptung. ■

Bemerkung: Falls g^{-1} existiert, kann die Substitutionsregel auch in der Form
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f\Big(g(t)\Big)g'(t)dt$$
geschrieben werden.

Beispiel: $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ soll berechnet werden. Mit der Substitution $x = x(t) = \cos t$ folgt wegen der Umkehrbarkeit von cos im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{x^{-1}(0)}^{x^{-1}(1)} \sqrt{1-x(t)^2}\,\frac{dx(t)}{dx}\,dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1-\cos^2 t}\,(-\sin t)dt = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^2 dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t\Big)dt = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}\,.
\end{aligned}
$$

Satz: (Produktintegration) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sei stetig, F sei eine Stammfunktion von f und $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Dann gilt

$$
\int_a^b f(x)g(x)dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx\,.
$$

Beweis: Es gilt $(F\cdot g)' = F'\cdot g + F\cdot g' = f\cdot g + F\cdot g'$, also

$$
F(x)g(x)\Big|_a^b = \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b F(x)g'(x)dx\,.
$$

■

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^2 x dx &= -\cos x\sin x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2 x dx \\
&= -\cos x\sin x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi (1-\sin^2 x)dx\,,
\end{aligned}
$$

also

$$
\int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi 1 dx = \frac{\pi}{2}\,.
$$

10.5 Integration rationaler Funktionen und die Partialbruchzerlegung

Ziel Berechnung bestimmter Riemann-Integrale

$$
\int_a^b f(x)dx \quad \text{für rationale Funktionen } f=\frac{p}{q}, \quad p,q \text{ Polynome,}
$$

bzw. Berechnung einer Stammfunktion von $f=\frac{p}{q}$.

Ist $\operatorname{Grad} p \geq \operatorname{Grad} q$, folgt durch Polynomdivision mit Rest (Euklid'scher Algorithmus) die Existenz von Polynomen h,r mit $\operatorname{Grad} r < \operatorname{Grad} q$ und $p = q\cdot h + r$, also

$$
\frac{p}{q} = h + \frac{r}{q}\,.
$$

Da Integrale über h elementar bestimmt werden können, wird im Folgenden immer

$$
\operatorname{Grad} p < \operatorname{Grad} q
$$

angenommen.

Beispiel (1) Berechne $\int \frac{1}{1-x^2}\, dx$.

Wir spalten $1-x^2$ in Linearfaktoren auf, d.h., $1-x^2=(1-x)(1+x)$, und machen mit zu bestimmenden Koeffizienten den Ansatz

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}=\frac{(A+B)+(A-B)x}{1-x^2}\,.$$

Der Ansatz liefert nach Multiplikation mit $1-x^2$ die Gleichung

$$1=(A+B)+(A-B)x,$$

welche die eindeutige Lösung $A+B=1$, $A-B=0$, also

$$A=B=\frac{1}{2}$$

hat. Damit folgt

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{1}{2}\Big(\int \frac{dx}{1-x}+\int \frac{dx}{1+x}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\big(\log|1+x|-\log|1-x|\big)=\frac{1}{2}\log\Big|\frac{1+x}{1-x}\Big|\,.\end{aligned}$$

Dabei dürfen zur Berechnung bestimmter Integrale die Punkte $+1$ und -1 nicht im Integrationsintervall liegen.

Fall 1 *Das Nennerpolynom q hat nur reelle Nullstellen*

In diesem Fall zerfällt q in reelle Linearfaktoren

$$q(x)=c\prod_{k=1}^{n}(x-\alpha_k)^{m_k}$$

mit paarweise verschiedenen Nullstellen $\alpha_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ der Vielfachheiten $m_1,\dots,m_n\in\mathbb{N}$ und $c\in\mathbb{R}^*$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Koeffizienten $A_{jk}\in\mathbb{R}$, $1\le k\le n$, $1\le j\le m_k$, so dass die **Partialbruchzerlegung**

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{A_{jk}}{(x-\alpha_k)^j}$$

gilt (ohne Beweis). Damit folgt

$$\int \frac{p}{q}\, dx=\sum_{k=1}^{n}\Big(A_{1k}\log|x-\alpha_k|+\sum_{j=2}^{m_k}\frac{A_{jk}}{1-j}\,\frac{1}{(x-\alpha_k)^{j-1}}\Big).$$

Beispiel (2) Berechne $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x)^3}$.

Wir machen den Ansatz

$$\frac{x^2}{(1+x)^3} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1+x)^2} + \frac{C}{(1+x)^3}\,.$$

Nach Multiplikation mit $(1+x)^3$ sind die Unbekannten $A, B, C \in \mathbb{R}$ aus der Gleichung

$$x^2 = A(1+x)^2 + B(1+x) + C \qquad (*)$$

zu bestimmen. Schreibt man die rechte Seite in der Standardform $Ax^2+(2A+B)x+(A+B+C)$, erhält man durch Koeffizientenvergleich

$$A = 1, \quad B = -2, \quad C = 1.$$

Eine weitere Möglichkeit, die Unbekannten zu bestimmen, besteht darin, die Gleichung $(*)$ in drei geschickt gewählten Punkten x_j zu testen. Aus $x_1 = -1$ folgt mit $(*)$ sofort $C = 1$, während der Punkt $x_2 = +\infty$ (Grenzwert $x_2 \to +\infty$) $A = 1$ liefert. Dann folgt mit $x_3 = 0$ schließlich $B = -2$.

Damit erhält man

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(1+x)^3}\,dx &= \int \frac{dx}{1+x} - 2\int \frac{dx}{(1+x)^2} + \int \frac{dx}{(1+x)^3} \\ &= \ln|1+x| + \frac{2}{1+x} - \frac{1/2}{(1+x)^2}\,.\end{aligned}$$

Fall 2 *q hat nichtreelle Nullstellen*

In diesem Fall hat q Paare komplex-konjugierter Nullstellen $z_k, \overline{z}_k \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ sowie ggf. weitere reelle Nullstellen. Wegen

$$\begin{aligned}(x-z_k)(x-\overline{z}_k) &= x^2 - 2x\,\mathrm{Re}\,z_k + |z_k|^2 = x^2 - 2\beta_k x + \gamma_k^2 \\ &= (x-\beta_k)^2 + \gamma_k^2 - \beta_k^2\end{aligned}$$

mit $\gamma_k^2 - \beta_k^2 > 0$ zerfällt q in quadratische über $\mathbb{R}$ nullstellenfreie Terme $q_1, \ldots, q_m$ und ggf. reelle Linearfaktoren:

$$\begin{aligned}q(x) &= c q_1(x)^{r_1} \cdot \ldots \cdot q_m(x)^{r_m} \cdot \prod_{k=1}^{n} (x-\alpha_k)^{m_k},\ r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{N}, \\ q_k(x) &= x^2 - 2\beta_k x + \gamma_k^2, \quad \gamma_k^2 - \beta_k^2 > 0,\ 1 \le k \le m.\end{aligned}$$

In diesem Fall gilt die **Partialbruchzerlegung** (ohne Beweis)

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_k} \frac{B_{jk} + C_{jk}x}{q_k^j(x)} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{A_{jk}}{(x-\alpha_k)^j}$$

mit Unbekannten A_{jk}, B_{jk}, $C_{jk} \in \mathbb{R}$. Die Integration der Terme $\frac{B+Cx}{q_k^j(x)}$ mit Nennerpolynomen

$$\begin{aligned} q_k(x) &= (x-\beta_k)^2 + \gamma_k^2 - \beta_k^2 \\ &= y^2 + d_k^2, \qquad\quad y = x - \beta_k, \quad d_k = \sqrt{\gamma_k^2 - \beta_k^2} > 0 \\ &= d_k^2(1+z^2), \qquad z = \frac{y}{d_k}\,, \end{aligned}$$

kann leicht auf die Standardfälle

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^j}\,dx \quad \text{und} \quad \int \frac{x}{(1+x^2)^j}\,dx, \quad j \in \mathbb{N},$$

reduziert werden.

Beispiel (3)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan x \\ \int \frac{x}{1+x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \\ \int \frac{x}{(1+x^2)^j}\,dx &= \frac{1}{2(1-j)}\,\frac{1}{(1+x^2)^{j-1}} \qquad \text{für } j \geq 2. \end{aligned}$$

Beispiel (4) Sei $I_j = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^j}$, $j \geq 1$.

Aus $\frac{1}{(1+x^2)^j} = \frac{1}{(1+x^2)^{j-1}} - \frac{x^2}{(1+x^2)^j}$ folgt mit partieller Integration für $j \geq 2$

$$\begin{aligned} I_j &= I_{j-1} - \int x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^j}\,dx \\ &= I_{j-1} + \int 1 \cdot \frac{1}{2(1-j)(1+x^2)^{j-1}}\,dx - \frac{x}{2(1-j)(1+x^2)^{j-1}} \\ &= \frac{2j-3}{2(j-1)}\,I_{j-1} + \frac{x}{2(j-1)(1+x^2)^{j-1}}\,. \end{aligned}$$

Deshalb kann I_j rekursiv aus $I_1 = \arctan x$ und rationalen Funktionen bestimmt werden.

Beispiel (5) Berechne $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^4}$

Das Polynom $q(x) = 1 + x^4$ besitzt keine reellen Nullstellen, jedoch vier verschiedene komplexe Nullstellen z_k auf dem Einheitskreis: $z_{1,2} = \pm\sqrt{i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ und $z_{3,4} = \pm\sqrt{-i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$. Damit erhält man nach längerer Rechnung die Aufspaltung in quadratische Faktoren

$$q(x) = (x^2 + 1 - \sqrt{2}\,x)(x^2 + 1 + \sqrt{2}\,x).$$

Folglich versuchen wir den Ansatz

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}\,x+1} + \frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}$$

und bestimmen aus 4 linearen Gleichungen mit den 4 Unbekannten a, b, c, d die Werte

$$a = -c = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,, \quad b = d = \frac{1}{2}\,.$$

Daraus folgt schließlich wegen

$$x^2 \pm \sqrt{2}\,x + 1 = \frac{1}{2}\big((\sqrt{2}\,x \pm 1)^2 + 1\big)$$

die Stammfunktion

$$\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{x^2+\sqrt{2}\,x+1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\big(\arctan(\sqrt{2}\,x+1) + \arctan(\sqrt{2}\,x-1)\big).$$

10.6 Uneigentliche Integrale

Das Riemann-Integral wurde bisher nur für beschränkte Funktionen auf beschränkten Intervallen definiert. Die Ausweitung des Integralbegriffs auf unbeschränkte Funktionen bzw. auf unbeschränkte Intervalle erfordert eine Definition mit einer zusätzlichen Limesbetrachtung.

Definition Sei $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ über jedem endlichen Intervall $[a,R]$, $R > a$, Riemann-integrierbar. Falls der Grenzwert

$$\lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx$$

existiert, heißt das Integral $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergent und man definiert das *uneigentliche Riemann-Integral*

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx.$$

Analog definiert man das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx := \lim_{R\to-\infty} \int_R^a f(x)dx,$$

sowie

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx,$$

falls $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ auf jedem endlichen Intervall $[-R, R]$ integrierbar ist und beide uneigentlichen Riemann-Integrale $\int_{-\infty}^{a} f$ und $\int_{a}^{\infty} f$ existieren. Man beachte, dass im letzten Teil der Definition die Existenz des uneigentlichen Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} f$ und sein Wert nicht von der Wahl des Punktes $a \in \mathbb{R}$ abhängen.

Beispiele (1) $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ konvergiert für $\alpha > 1$, denn

$$\int_{1}^{R} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\,(R^{1-\alpha} - 1) \to \frac{1}{\alpha - 1} \quad \text{für } R \to \infty.$$

Dagegen ist $\frac{1}{x^\alpha}$ für $\alpha \leq 1$ **nicht** auf $[1, \infty)$ uneigentlich integrierbar.

Beispiel (2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$, denn

$$\begin{aligned} & \lim_{R \to -\infty} \int_{R}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{R \to \infty} \int_{0}^{R} \frac{dx}{1+x^2} \\ \equiv \; & \lim_{R \to -\infty} - \arctan(-R) + \lim_{R \to \infty} \arctan R \\ = \; & 2 \cdot \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Definition Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a + \varepsilon, b]$, $0 < \varepsilon < b - a$, Riemann-integrierbar. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx,$$

heißt f auf $(a, b]$ *uneigentlich Riemann-integrierbar*, und man definiert das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_{a}^{b} f(x)dx := \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx\,.$$

Analog definiert man ggf.

$$\int_{a}^{b} f(x)dx := \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Beispiel (1) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$ konvergiert für $\alpha < 1$, denn

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \varepsilon^{1-\alpha}\right) \to \frac{1}{1-\alpha} \quad \text{für } \varepsilon \to 0+\ .$$

Dagegen ist $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ für $\alpha \geq 1$ **nicht** auf $(0, 1]$ uneigentlich Riemann-integrierbar.

Definition Sei $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ auf jedem kompakten Teilintervall $[a', b'] \subset (a,b)$ Riemann-integrierbar. Falls für ein $c \in (a,b)$ beide uneigentlichen Riemann-Integrale $\int_a^c f$ und $\int_c^b f$ existieren, heißt f auf (a,b) *uneigentlich Riemann-integrierbar,* und man definiert

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Dabei ist die Existenz und der Wert des uneigentlichen Riemann-Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ von der Wahl des Punktes $c \in (a,b)$ unabhängig.

Satz 10.16 (Majorantenkriterium) *Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, auf jedem kompakten Teilintervall $[a', b'] \subset (a,b)$ Riemann-integrierbar und gelte*

$$|f(x)| \leq g(x) \quad \text{für alle } x \in (a,b).$$

Ist g auf (a,b) uneigentlich Riemann-integrierbar, so existiert auch $\int_a^b f(x)\,dx$.

Beweis Sei $c \in (a,b)$ fest gewählt. Dann gilt für beliebige Punkte $a < a' < a'' < c$,

$$\Big|\int_{a'}^c f - \int_{a''}^c f\Big| = \Big|\int_{a'}^{a''} f\Big| \leq \int_{a'}^{a''} |f| \leq \int_{a'}^{a''} g = \Big|\int_{a'}^c g - \int_{a''}^c g\Big|.$$

Da g auf (a,c) uneigentlich Riemann-integrierbar ist, folgt aus dem Cauchy-Kriterium die Existenz des Grenzwertes $\int_a^c f = \lim_{a' \to a+} \int_{a'}^c f$. Ebenso verfährt man für $\int_c^b f$. ∎

Beispiel $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ist uneigentlich Riemann-integrierbar. Zum Beweis der Existenz ist es nicht notwendig, die Stammfunktion von $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ zu kennen. Denn auf $[0,1)$ gilt z. B.

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1-x)(1+x)} \geq \sqrt{1-x},$$

so dass mit Satz 10.16 für $\varepsilon \to 0+$

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \leq \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int_\varepsilon^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2(1-\sqrt{\varepsilon}) \to 2$$

folgt. Analog zeigt man die Existenz von

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-1+\varepsilon}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \leq 2.$$

Genauer gilt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \big(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin(-1+\varepsilon)\big) = \pi. \end{aligned}$$

Satz 10.17 (Vergleichskriterium für Reihen)
Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}_+$ eine monoton fallende Funktion. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergiert genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergiert.

Beweis Da $f(n) \leq f(x) \leq f(n-1)$ für $n-1 \leq x \leq n$ gilt, folgt

$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \leq f(n-1)$$

und nach Summation über $n = 2, 3, \ldots, N$

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \leq \int_1^N f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

Falls $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergiert, ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ beschränkt und folglich konvergent. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergent, so ist auch die monoton wachsende Funktion $R \mapsto \int_1^R f(x)\,dx$ beschränkt und hat folglich für $R \to \infty$ einen Grenzwert. ∎

Beispiel Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konvergiert für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha \leq 1$.

Satz 10.18 *Für $x > 0$ ist das uneigentliche Riemann-Integral*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt \quad \text{(Gamma-Funktion)}$$

konvergent. Es gilt

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

sowie die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{für } x > 0.$$

Beweis Das Integral über $t^{x-1}e^{-t}$ ist für $t \in (0,1]$ und $t \in [1, \infty)$ getrennt zu analysieren. Auf $(0,1]$ gilt

$$t^{x-1}e^{-t} \leq t^{x-1},$$

so dass nach Satz 10.16 das Integral $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$ konvergiert. Auf $[1, \infty)$ gilt mit einer geeigneten Konstanten $c = c(x) > 0$

$$e^{-t} \leq \frac{c}{t^{x+1}},\ t \in [1, \infty),$$

so dass $t^{x-1}e^{-t} \leq \frac{c}{t^2}$ folgt. Dann impliziert Satz 10.16 wegen $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} = 1$ die Konvergenz des Integrals $\int_1^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Folglich existiert das uneigentliche Integral von $t^{x-1}e^{-t}$ auf $(0, \infty)$ für jedes $x > 0$.

Zum Beweis der Funktionalgleichung benutzt man partielle Integration auf $[\varepsilon, R]$, $0 < \varepsilon < R < \infty$, und läßt anschließend $\varepsilon \to 0+$ und $R \to +\infty$ laufen; eine direkte partielle Integration auf $(0, \infty)$ ist dagegen nicht erlaubt. Man erhält für $x > 0$ und $0 < \varepsilon < R < \infty$

$$\int_\varepsilon^R t^x e^{-t}\, dt = +x \int_\varepsilon^R t^{x-1} e^{-t}\, dt - t^x e^{-t}\Big|_\varepsilon^R ,$$

woraus für $\varepsilon \to 0+$ und $R \to \infty$ die Identität

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) - \lim_{R\to\infty} R^x e^{-R} + \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^x e^{-\varepsilon} = x\Gamma(x)$$

folgt. Schließlich folgt mit

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1\,,$$

der Funktionalgleichung und vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $\Gamma(n+1) = n!$. ■