# Analysis II für M, LaG, Ph

## 13. Tutorium

### Lösungsvorschlag

**T1 Divergenz als Quelldichte**

Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Für $r > 0$ betrachten wir den Fluss

$$\int_{\partial B_r} F(x) \cdot n(x)\, d\sigma(x)$$

von $F$ durch den Rand $\partial B_r$ der abgeschlossenen Kugel $B_r$ von Radius $r$ um $x_0$, wobei $n$ den äußeren Normaleneinheitsvektor bezeichne. Zeigen Sie mit dem Gaußschen Integralsatz, dass

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_r)} \int_{\partial B_r} F(x) \cdot n(x)\, d\sigma(x) = \mathrm{div} F(x_0).$$

gilt. Somit lässt sich die Divergenz als Stärke einer Quelle oder einer Senke in einem Geschwindigkeits- oder Kraftfeld interpretieren.

***Lösung.*** *Es gilt für $r > 0$*

$$\mathrm{div} F(x_0) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_r)} \int_{B_r} \mathrm{div} F(x_0)\, dx$$

*Anwendung des Gaußschen Integralsatzes liefert*

$$\int_{B_r} \mathrm{div} F(x)\, dx = \int_{\partial B_r} F(x) \cdot n(x)\, d\sigma(x).$$

*Wir erhalten für $r > 0$*

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{div} F(x_0) - \frac{\int_{\partial B_r} F(x) \cdot n(x)\, d\sigma(x)}{\mathrm{Vol}(B_r)}\right| &= \frac{1}{\pi r^2} \left| \int_{\partial B_r} \mathrm{div} F(x_0)\, dx - \int_{B_r} F(x) \cdot n(x) d\sigma(x)\right| \\ &\le \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r} |\mathrm{div} F(x_0) - \mathrm{div} F(x)|\, dx.\end{aligned}$$

*Da $\mathrm{div} F$ stetig ist, finden wir zu $\epsilon > 0$ ein $r_0 > 0$, so dass*

$$|\mathrm{div} F(x) - \mathrm{div} F(x_0)| \le \epsilon \quad \forall x \in B_r\ \forall r \le r_0$$

*gilt. Es folgt*

$$\left|\mathrm{div} F(x_0) - \frac{\int_{\partial B_r} F(x) \cdot n(x)\, d\sigma(x)}{\mathrm{Vol}(B_r)}\right| \le \epsilon$$

*für alle $r \le r_0$ und damit die Behauptung.*

**T2 Greensche Formeln zweiter Ordnung**

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein BV-Normalbereich mit positiv orientiertem Rand $\gamma = \partial B$, der sich stückweise als regulärer $C^1$- Weg schreiben lässt. Seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen auf einer offenen Menge $U \supseteq B$. Dann gelten die beiden Greenschen Formeln

$$\int_B f \Delta g\, dx + \int_B \nabla f \cdot \nabla g\, dx = \int_{\partial B} f \frac{\partial g}{\partial n}\, d\sigma\,, \tag{1}$$

$$\int_B f\Delta g - g\Delta f\, dx = \int_{\partial B} (f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n})\, d\sigma. \tag{2}$$

Dabei ist $\frac{\partial f}{\partial n} := \nabla f \cdot n$ die Richtungsableitung von $f$ in Richtung des äußeren Normaleneinheitsvektors $n$.

***Lösung.*** *Betrachte das Vektorfeld $h := f\nabla g$. Es gilt*

$$\mathrm{div} h = \nabla f \cdot \nabla g + f\Delta g. \tag{3}$$

*Die Gaußsche Formel liefert*

$$\int_B \mathrm{div} h(x)\,dx = \int_{\partial B} h(x)\cdot n(x)\,d\sigma(x)\,,$$

*woraus mit (3) die Formel (1) folgt. Zum Beweis der Formel (2) wendet man die gerade bewiesene Formel auf die beiden Integrale $\int_B f\Delta g$ und $\int_B g\Delta f$ an und subtrahiert diese beiden Integrale voneinander.*

**T3 Greensche Formel für Kreisringe**

Sei $K_{r,R} := \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid r \le \|x - x_0\| \le R \,\}$ der abgeschlossene Kreisring um $x_0 \in \mathbb{R}^2$ mit den Radien $0 < r < R$ und sei $f : U \to \mathbb{R}^2$ ein auf einer offenen Umgebung $U \supseteq K_{r,R}$ stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_{K_{r,R}} \mathrm{rot} f(x)\,dx = \int_{\partial K_R} f(x)\cdot dx - \int_{\partial K_r} f(x)\cdot dx\,,$$

wobei die Kurven in den entsprechenden Kurvenintegralen im positiven Sinne durchlaufen werden sollen.

*Es sei $S$ die Gerade durch $x_0$ parallel zur $x_1$-Achse. Weiterhin bezeichne $S_+$ die rechte Hälfte von $S$ und $S_-$ die linke Hälfte von $S$ bezüglich $x_0$. Es sei $z_1^-$ der Schnittpunkt von $S_-$ mit $K_R$, dem Kreis um $x_0$ mit Radius $R$ und $z_2^-$ der Schnittpunkt von $S_-$ mit $K_r$. Analog erklären wir $z_1^+$ und $z_2^+$ als die Schnittpunkte von $S_+$ mit $K_R$ bzw. mit $K_r$. Wir bezeichnen mit $\gamma_1$ den Weg, bestehend aus den Strecken $\overline{z_1^+, z_2^+}$, dem unteren Halbkreis zwischen $z_2^+$ und $z_2^-$, der Strecke $\overline{z_2^-, z_1^-}$ und dem Halbkreis zwischen $z_1^-$ und $z_1^+$. Der Weg $\gamma_1$ werde (wie beschrieben) im positiv orientieren Sinn durchlaufen. $K_1$ sei der Abschluss des beschränkten Gebiets, das von $\gamma_1$ begrenzt werde (der Rand von $K_1$ sei also $\gamma_1$). Analog bezeichne $\gamma_2$ den positiv orientierten Weg, bestehend aus den Strecken $\overline{z_1^-, z_2^-}$, dem Halbkreis zwischen $z_2^-$ und $z_2^+$, der Strecke $\overline{z_2^+, z_1^+}$ und dem Halbkreis zwischen $z_1^+$ und $z_1^-$. Es sei $K_2$ der Abschluss des beschränkten Gebiets, das von $\gamma_2$ begrenzt wird.*
*Gemäß Korollar 8.2 können wir den Greenschen Integralsatz auf $K_1$ und $K_2$ anwenden und erhalten*

$$\int_{K_1} \mathrm{rot} F(x)\,dx = \int_{\gamma_1} F(x)\cdot dx\,,$$
$$\int_{K_2} \mathrm{rot} F(x)\,dx = \int_{\gamma_2} F(x)\cdot dx.$$

*Gemäß Korollar 6.7 gilt*

$$\begin{aligned}\int_{K_{r,R}} \mathrm{rot} F(x)\,dx &= \int_{K_1} \mathrm{rot} F(x)\,dx + \int_{K_2} \mathrm{rot} F(x)\,dx \\ &= \int_{\gamma_1} F(x)\cdot dx + \int_{\gamma_2} F(x)\cdot dx.\end{aligned} \tag{4}$$

*Nun beachte man, dass sich die Integrale über die Verbindungsstrecken zwischen $z_1^-$ und $z_2^-$ und $z_1^+$ und $z_2^+$ in der Summe der Wegintegrale in (4) gerade aufheben und somit erhalten* *wir*

$$\begin{aligned}\int_{K_{r,R}} \mathrm{rot} F(x)\,dx &= \int_{\partial K_R} F(x)\cdot dx + \int_{-\partial K_r} F(x)\cdot dx \\ &= \int_{\partial K_R} F(x)\cdot dx - \int_{\partial K_r} F(x)\cdot dx.\end{aligned}$$

*Mit dem Integral über* $-\partial K_r$ *ist gemeint, dass die Kurve über* $K_r$ *im negativen Sinn durchlaufen wird.*

**Bemerkung.** *Da* $F$ *nur in einer Umgebung von* $K_{r,R}$ *definiert ist, ist es nicht möglich, die Aufgabe über die Formel*

$$\int_{K_{r,R}} \mathrm{rot} F(x)\,dx = \int_{K_R} \mathrm{rot} F(x)\,dx - \int_{K_r} \mathrm{rot} F(x)\,dx = \int_{\partial K_R} F(x)\cdot dx - \int_{\partial K_r} F(x)\cdot dx$$

*zu lösen.*