Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Reinhard Farwig
Christian Komo
Jennifer Prasiswa
Raphael Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

17.06.2009

Analysis II für M, LaG, Ph

13. Tutorium

T1 Divergenz als Quelldichte

Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Für $r > 0$ betrachten wir den Fluss

$$\int_{\partial B_r} F(x) \cdot n(x) \, d\sigma(x)$$

von F durch den Rand ∂B_r der abgeschlossenen Kugel B_r von Radius r um x_0, wobei n den äußeren Normaleneinheitsvektor bezeichne. Zeigen Sie mit dem Gaußschen Integralsatz, dass

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_r)} \int_{\partial B_r} F(x) \cdot n(x) \, d\sigma(x) = \mathrm{div} F(x_0).$$

gilt. Somit lässt sich die Divergenz als Stärke einer Quelle oder einer Senke in einem Geschwindigkeits- oder Kraftfeld interpretieren.

T2 Greensche Formeln zweiter Ordnung

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein BV-Normalbereich mit positiv orientiertem Rand $\gamma = \partial B$, der sich stückweise als regulärer C^1- Weg schreiben lässt. Seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen auf einer offenen Menge $U \supseteq B$. Dann gelten die beiden Greenschen Formeln

$$\int_B f \Delta g \, dx + \int_B \nabla f \cdot \nabla g \, dx = \int_{\partial B} f \frac{\partial g}{\partial n} \, d\sigma \,, \tag{1}$$

$$\int_B f \Delta g - g \Delta f \, dx = \int_{\partial B} (f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n}) \, d\sigma. \tag{2}$$

Dabei ist $\frac{\partial f}{\partial n} := \nabla f \cdot n$ die Richtungsableitung von f in Richtung des äußeren Normaleneinheitsvektors n.

T3 Greensche Formel für Kreisringe

Sei $K_{r,R} := \{\, x \in \mathbb{R}^2 \,|\, r \le \|x - x_0\| \le R \,\}$ der abgeschlossene Kreisring um $x_0 \in \mathbb{R}^2$ mit den Radien $0 < r < R$ und sei $f : U \to \mathbb{R}^2$ ein auf einer offenen Umgebung $U \supseteq K_{r,R}$ stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_{K_{r,R}} \mathrm{rot} f(x) \, dx = \int_{\partial K_R} f(x) \cdot dx - \int_{\partial K_r} f(x) \cdot dx \,,$$

wobei die Kurven in den entsprechenden Kurvenintegralen im positiven Sinne durchlaufen werden sollen.